

Développer en série entière la fonction  $f$  définie par :

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^3)}$$

---

## Analyse

Le dénominateur se factorise aisément sur  $\mathbb{C}$ . On obtient facilement les modules des pôles et, de fait, le rayon de convergence de la série entière ...

---

## Résolution

Il vient facilement :

$$1-z^3 = (1-z)(1-jz)(1-j^2z)$$

Où  $1, j$  et  $j^2$  désigne les racines cubiques de l'unité.

On note ainsi que les modules des pôles de  $f$  sont égaux à 1. Le rayon de convergence de la série entière vaut donc 1.

D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1-z)(1-z^3)} \\ &= \frac{1}{(1-z)^2(1-jz)(1-j^2z)} \\ &= \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1-jz} + \frac{D}{1-j^2z} \end{aligned}$$

On obtient les réels  $A, B$  et  $C$  par des méthodes classiques :

$$(1-z)^2 \times f(z) = \frac{1}{(1-jz)(1-j^2z)} = \frac{1}{1+z+z^2} = B + (1-z) \times A + (1-z)^2 \times \left[ \frac{C}{1-jz} + \frac{D}{1-j^2z} \right]$$

Pour  $z=1$ , on obtient alors :

$$B = \frac{1}{1+1+1^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

En procédant de façon analogue :

$$(1-jz) \times f(z) = \frac{1}{(1-z)^2(1-j^2z)} = C + (1-jz) \times \left[ \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{D}{1-j^2z} \right]$$

Pour  $z = j^2$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(1-j^2)^2(1-j^2 \times j^2)} = \frac{1}{(1-2j^2+j^4)(1-j^4)} \\ &= \frac{1}{-3j^2(1-j)} = \frac{1}{3(1-j^2)} = \boxed{\frac{1-j}{9}} \end{aligned}$$

On a également :

$$(1-j^2z) \times f(z) = \frac{1}{(1-z)^2(1-jz)} = D + (1-j^2z) \times \left[ \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1-jz} \right]$$

Pour  $z = j$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{(1-j)^2(1-j \times j)} = \frac{1}{(1-2j+j^2)(1-j^2)} \\ &= \frac{1}{-3j(1-j^2)} = \frac{1}{3(1-j)} = \boxed{\frac{1-j^2}{9}} \end{aligned}$$

Enfin, on peut facilement tenir compte de :  $f(0) = 1$  et, à partir de la décomposition en éléments simples :  $f(0) = A + B + C + D$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} A &= 1 - B - C - D \\ &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1-j}{9} - \frac{1-j^2}{9} \\ &= \frac{9-3-1+j-1+j^2}{9} \\ &= \frac{6-2-1}{9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \frac{1}{1-z} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{9} \frac{1-j}{1-jz} + \frac{1}{9} \frac{1-j^2}{1-j^2z} \\ &= \frac{1}{3}(1-z)^{-1} + \frac{1}{3}(1-z)^{-2} + \frac{1}{9}(1-j)(1-jz)^{-1} + \frac{1}{9}(1-j^2)(1-j^2z)^{-1} \end{aligned}$$

On considère alors les développements classiques :

$$\begin{aligned}(1-z)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \\(1-z)^{-2} &= \left( (1-z)^{-1} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n \\(1-jz)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} j^n z^n \\(1-j^2 z)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} j^{2n} z^n\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{3}(1-z)^{-1} + \frac{1}{3}(1-z)^{-2} + \frac{1}{9}(1-j)(1-jz)^{-1} + \frac{1}{9}(1-j^2)(1-j^2 z)^{-1} \\&= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n + \frac{1}{9}(1-j) \sum_{n=0}^{+\infty} j^n z^n + \frac{1}{9}(1-j^2) \sum_{n=0}^{+\infty} j^{2n} z^n \\&= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ 3 + 3(n+1) + (1-j)j^n + (1-j^2)j^{2n} \right] z^n \\&= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ 3n + 6 + j^n (1-j + j^n (1-j^2)) \right] z^n \\&= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ n + 2 + \frac{1}{3} j^n (1-j + j^n (1-j^2)) \right] z^n\end{aligned}$$

On tient compte alors de la congruence de  $n$  modulo 3 :

- Si  $n \equiv 0[3]$ , on a  $j^n = 1$  et  $j^n (1-j + j^n (1-j^2)) = 1-j+1-j^2 = 3$ .
- Si  $n \equiv 1[3]$ , on a  $j^n = j$  et  $j^n (1-j + j^n (1-j^2)) = j(1-j + j(1-j^2)) = j \times 0 = 0$ .
- Si  $n \equiv 2[3]$ , on a  $j^n = j^2$  et  $j^2 (1-j + j^2 (1-j^2)) = j^2 (1-j + j^2 (1-j^2)) = j^2 \times (-3j) = -3$ .

On a alors :

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ (k+1) z^{3k} + (k+1) z^{3k+1} + (k+1) z^{3k+2} \right] \\&= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \left[ z^{3k} + z^{3k+1} + z^{3k+2} \right]\end{aligned}$$

Remarque : en tenant compte du fait que  $k = E\left(\frac{n}{3}\right)$ , on peut finalement écrire :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( E\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \right) z^n$$

---

## Résultat final

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{1; j; j^2\}$  par :

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^3)}$$

est développable en série entière sur le disque ouvert de centre O et de rayon 1 et on a :

$$\forall z / |z| < 1, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( E\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \right) z^n = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \left[ z^{3k} + z^{3k+1} + z^{3k+2} \right]$$