Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

Etudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.

Analyse

Les coefficients ne posent pas de problème d'existence particulier. Leur forme suggère d'utiliser la règle de d'Alembert.

Résolution

Pour tout entier naturel n, posons : $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \times \frac{(n!)^2}{((n+1)\times n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \\
&= 4\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}
\end{aligned}$$

On a : $\lim_{n\to+\infty}\left(4\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right) = 4\times 1 = 4$.

On en déduit alors, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière est égal à $\frac{1}{4}$.

Etudions maintenant la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.

Pour $x = \frac{1}{4}$, on doit étudier la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Il s'agit d'une série à termes positifs. Faisant principalement intervenir des factorielles, nous allons utiliser la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

On a alors : $(2n)! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \times 2n} = 2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\sqrt{\pi n}$ et $(n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times 2\pi n$

On en déduit :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4^n}\frac{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\sqrt{\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times 2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ étant divergente, on en déduit que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ diverge.

Pour $x = -\frac{1}{4}$, on doit étudier la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

Il s'agit d'une série alternée et on a : $\left|\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

La suite $\left(\left|\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right|\right)_n = (a_n)$ est-elle décroissante ?

D'après les calculs menés lors de la détermination du rayon de convergence de la série entière, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{4^n}} = \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} < 1$$

On en déduit que la suite (a_n) est strictement décroissante.

D'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ converge.

Résultat final

La série entière $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ converge pour tout réel x de l'intervalle $\left[-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right[$.