

Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum \frac{n^2 + 3}{n^3 - 2} x^n$$

Etudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.

---

## Analyse

Les coefficients ne posent pas de problème d'existence particulier. Leur forme suggère d'utiliser la règle de d'Alembert.

---

## Résolution

Pour tout entier naturel  $n$ , posons :  $u_n = \frac{n^2 + 3}{n^3 - 2}$ .

On a alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2 + 3}{(n+1)^3 - 2}}{\frac{n^2 + 3}{n^3 - 2}} = \frac{(n+1)^2 + 3}{n^2 + 3} \times \frac{n^3 - 2}{(n+1)^3 - 2}$$

On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2 + 3}{n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 2}{(n+1)^3 - 2} = 1$  (fractions rationnelles).

On en déduit alors, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière est égal à 1.

Etudions maintenant la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.

Pour  $x = 1$ , on doit étudier la série  $\sum \frac{n^2 + 3}{n^3 - 2}$ .

Il s'agit d'une série à termes positifs (à partir de  $n = 2$ ) et on a facilement :  $u_n \sim \frac{1}{n}$ . La série

$\sum \frac{n^2 + 3}{n^3 - 2}$  est de même nature que la série  $\sum \frac{1}{n}$  qui est une série de Riemann divergente.

La série entière  $\sum \frac{n^2+3}{n^3-2} x^n$  diverge donc pour  $x=1$ .

Pour  $x=-1$ , on doit étudier la série  $\sum \frac{n^2+3}{n^3-2} (-1)^n$ .

A partir de  $n=2$ , les termes sont alternés. On montre facilement que la suite  $\left(\frac{n^2+3}{n^3-2}\right)_n$  est décroissante à partir de  $n=2$ . Par ailleurs, d'après l'équivalent obtenu ci-dessus, elle converge vers 0. Le théorème spécial des séries alternées nous permet alors de conclure que la série  $\sum \frac{n^2+3}{n^3-2} (-1)^n$  converge.

La série entière  $\sum \frac{n^2+3}{n^3-2} x^n$  diverge donc pour  $x=-1$ .

---

## Résultat final

La série entière  $\sum \frac{n^2+3}{n^3-2} x^n$  converge pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-1; 1[$ .