Développer en série entière la fonction *f* définie par :

$$f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right)$$

Analyse

On peut facilement faire apparaître des fonctions développables en séries entières en considérant l'argument du logarithme népérien comme la somme des trois premiers termes d'une suite géométrique …

Résolution

Pour $x \neq 1$, on a :

$$1 + x + x^2 = \frac{1 - x^3}{1 - x}$$

Pour $x < 1$, on peut alors écrire :

$$f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right) = \ln\left(\frac{1 - x^3}{1 - x}\right) = \ln\left(1 - x^3\right) - \ln\left(1 - x\right)$$

La fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$ est développable en série entière sur $]-1;1[$ et on a :

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

On a l'équivalence $x \in]-1;1[\Leftrightarrow x^3 \in]-1;1[$ ($x \mapsto x^3$ est bijective de $]-1;1[$ dans lui-même) et il vient immédiatement :

$$\ln\left(1 - x^3\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^3\right)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n}$$

On en tire, pour tout x de $]-1;1[$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(1-x^3\right)-\ln(1-x) \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}+\frac{x^{3k+3}}{3k+3}-\frac{x^{3k+3}}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}-\frac{2x^{3k+3}}{3k+3}\right)
\end{aligned}$$

Résultat final

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\ln\left(1+x+x^2\right)$$

est développable en série entière sur l'intervalle $]-1;1[$ et on a :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}-\frac{2x^{3k+3}}{3k+3}\right)$$