Développer en série entière la fonction *f* définie par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Analyse

On fait apparaître une fonction développable en série entière en multipliant le numérateur et le dénominateur de l'argument de la racine carrée par $1-x$.

Résolution

Notons d'abord que la fonction *f* est définie sur $]-1\,;1]$.

On a alors, pour tout réel de $]-1\,;1[$:

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1-x)}}=\frac{\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Il convient donc, fondamentalement, de développer $x\mapsto\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Pour tout α réel et pour tout réel de $]-1\,;1[$, on a le développement classique :

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

Comme *x* appartient à $]-1\,;1[$, il en va de même pour $-x^2$ et on peut écrire :

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1+\left(-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-x^2\right)^n$$

Dans un premier temps, simplifions l'écriture de $-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)$. Ce produit comporte *n* facteurs :

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)=\frac{(-1)(-3)\dots(-2n+1)}{2^n}=(-1)^n\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n}$$

On fait alors apparaître $(2n)!$ au numérateur :

$$(-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} = (-1)^n \frac{1.2.3.4\ldots(2n-1).(2n)}{2^n \times 2.4.6\ldots(2n)} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n \times 2^n \times n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} \times n!}$$

Finalement :

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} \times n!}$$

Il vient alors :

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} == \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} \times n!}}{n!}\left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \times (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} x^{2n}$$

D'où, finalement :

$$f(x) = (1-x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2}\left(x^{2n} - x^{2n+1}\right)$$

Résultat final

La fonction f définie sur $]-1;1]$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

est développable en série entière sur l'intervalle $]-1;1[$ et on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2}\left(x^{2n} - x^{2n+1}\right)$$