

On considère la série entière de la variable réelle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n$$

1. Déterminer son rayon de convergence R .
2. Calculer la somme pour tout x de $] -R ; R[$.

Analyse

La première question ne pose pas de problème particulier. Pour la deuxième, on fait apparaître des séries entières dérivées en transformant n^3 .

Résolution

Question 1

On peut appliquer ici la règle de D'Alembert. En notant : $a_n = n^3$, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$$

On en déduit alors : $R = \frac{1}{1} = 1$.

$$\boxed{R = 1}$$

Question 2

On a :

$$\begin{aligned} n^3 &= (n+3)(n+2)(n+1) - 6n^2 - 11n - 6 \\ &= (n+3)(n+2)(n+1) - 6(n+2)(n+1) + 7n + 6 \\ &= (n+3)(n+2)(n+1) - 6(n+2)(n+1) + 7(n+1) - 1 \end{aligned}$$

Or, pour tout x de $]-1; +1[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)(n+2)(n+1)x^n = \frac{6}{(1-x)^4}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+3)(n+2)(n+1) - 6(n+2)(n+1) + 7(n+1) - 1] x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)(n+2)(n+1)x^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \frac{6}{(1-x)^4} - 6 \times \frac{2}{(1-x)^3} + 7 \times \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1}{(1-x)^4} [6 - 12(1-x) + 7(1-x)^2 - (1-x)^3] \\ &= \frac{1}{(1-x)^4} (\cancel{6} - \cancel{12} + 12x - \cancel{7} - 14x + 7x^2 - \cancel{1} + 3x - 3x^2 + x^3) \\ &= \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4} \\ &= \frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall x \in]-1; +1[, \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n = \frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(1-x)^4}$$

Résultat final

$$\forall x \in]-1; +1[, \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n = \frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(1-x)^4}$$