

On considère la série entière de la variable réelle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n+1} x^n$$

1. Déterminer son rayon de convergence R .
2. Calculer la somme pour tout x de $]-R; R[$.

Analyse

La première question ne pose pas de problème particulier. Pour la deuxième, on fait apparaître des développements « classiques » en transformant $\frac{n^2+1}{n+1}$.

Résolution

Question 1

On peut appliquer ici la règle de D'Alembert. En notant : $a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)+1}}{\frac{n^2+1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+2n+2}{n+2} \times \frac{n+1}{n^2+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+1} \times \frac{n+1}{n+2} \right) = 1$$

On en déduit alors : $R = \frac{1}{1} = 1$.

$$R = 1$$

Question 2

On a :

$$\frac{n^2+1}{n+1} = \frac{n(n+1)-n+1}{n+1} = \frac{n(n+1)-(n+1)+2}{n+1} = n-1 + \frac{2}{n+1}$$

On aurait également pu remarquer : $n^2 + 1 = (n^2 - 1) + 2 = (n+1)(n-1) + 2$.

Or, pour tout x de $]-1; +1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n-1 + \frac{2}{n+1} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

Posons alors, pour tout x de $]-1; +1[$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Il vient : $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = x f'(x) = x \times \frac{1}{(1-x)^2}$

Pour $x \neq 0$, on a aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$.

Posons alors : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$. On en tire : $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = f(x) = \frac{1}{1-x}$.

En tenant compte de $g(0) = 0$, on obtient finalement : $g(x) = -\ln(1-x)$.

Il vient enfin :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n+1} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} - \frac{2}{x} \ln(1-x) \\ &= \frac{2x-1}{(1-x)^2} - 2 \frac{\ln(1-x)}{x} \end{aligned}$$

Finalement : $\forall x \in]-1; +1[\setminus \{0\}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n+1} x^n = \frac{2x-1}{(1-x)^2} - 2 \frac{\ln(1-x)}{x}$

Pour $x = 0$, la somme est nulle.

Résultat final

$$\begin{aligned} \text{Pour } x = 0, \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n+1} x^n = 0 \\ \forall x \in]-1; +1[\setminus \{0\}, \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n+1} x^n = \frac{2x-1}{(1-x)^2} - 2 \frac{\ln(1-x)}{x} \end{aligned}$$