

On considère la série entière de la variable réelle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5}{n!} x^n$$

1. Déterminer son rayon de convergence R .
2. Calculer la somme pour tout x de $] -R ; R[$.

Analyse

La première question ne pose pas de problème particulier. Pour la deuxième, on fait apparaître des développements dérivés de celui de l'exponentielle.

Résolution

Question 1

On peut appliquer ici la règle de D'Alembert. En notant : $a_n = \frac{n^5}{n!}$, il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{(n+1)!}}{\frac{n^5}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(n+1)^5}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^5} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n!}{(n+1)!} \times \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} \times \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 \right) = 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

On en déduit alors : $R = +\infty$.

$$R = +\infty$$

Question 2

L'idée générale consiste ici à transformer l'écriture de la puissance n^5 en une somme de produits permettant de simplifier la factorielle du dénominateur. Cette transformation n'étant pas immédiate, nous la construisons à partir de puissances d'exposants plus petits.

On a :

$$n^2 = n(n-1) + n$$

$$\begin{aligned}n^3 &= n(n-1)(n-2) + 3n^2 - 2n \\ &= n(n-1)(n-2) + 3[n(n-1) + n] - 2n \\ &= n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n^4 &= n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n^3 - 11n^2 + 6n \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3) + 6[n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n] - 11[n(n-1) + n] + 6n \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n^5 &= n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + 10n^4 - 35n^3 + 50n^2 - 24n \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + 10[(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n] \\ &\quad - 35[n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n] + 50[n(n-1) + n] - 24n \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + 10(n-1)(n-2)(n-3) + 25n(n-1)(n-2) + 15n(n-1) + n\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + 10(n-1)(n-2)(n-3) + 25n(n-1)(n-2) + 15n(n-1) + n}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{(n-5)!} x^n + 10 \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{(n-4)!} x^n + 25 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} x^n + 15 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+5} + 10 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+4} + 25 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+3} + 10 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1} \\ &= x^5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n + 10x^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n + 25x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n + 10x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= (x^5 + 10x^4 + 25x^3 + 10x^2 + x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= x(x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x + 1)e^x\end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5}{n!} x^n = x(x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x + 1)e^x$$

Résultat final

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5}{n!} x^n = x(x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x + 1)e^x$$