

Calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2 - 1}$$

Analyse

On commence par déterminer le rayon de convergence de la série. Ensuite, une décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{4n^2 - 1}$ permet de se ramener à deux calculs plus simples.

Résolution

Comme : $\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2 - 1} = x \frac{(-1)^n (x^2)^n}{4n^2 - 1}$, on s'intéresse au rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(-1)^n y^n}{4n^2 - 1}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 1}{4(n+1)^2 - 1} = 1$, on peut conclure, grâce à la règle de

D'Alembert que la série entière $\sum \frac{(-1)^n y^n}{4n^2 - 1}$ admet 1 pour rayon de convergence. Il en va

donc de même pour les séries entières $\sum \frac{(-1)^n (x^2)^n}{4n^2 - 1}$ et $\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2 - 1}$.

Pour $x = 1$, on a : $\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$. Comme $\frac{1}{4n^2 - 1} \sim \frac{1}{4n^2}$ et comme la série $\sum \frac{1}{4n^2}$ est une série de Riemann convergente, la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$ est absolument convergente et donc convergente.

Pour $x = -1$, on a : $\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$ et, en raisonnant comme dans le cas précédent, la série numérique $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$ est absolument convergente et donc convergente.

En définitive, la série $\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2 - 1}$ converge pour tout réel x de l'intervalle $[-1; 1]$.

On a facilement :

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

On peut alors écrire, les séries entières $\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n-1}$ et $\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ étant également convergentes sur l'intervalle $[-1; 1]$ (pour $x = -1$ ou $x = 1$, conclure à l'aide du critère spécial des séries alternées) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Posons alors, pour tout x réel de l'intervalle $[-1; 1]$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n-1} \text{ et } h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

On a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n-1} \\ &= -x - x^3 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n-1} \\ &= -x - x^3 + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} \\ &= -x - x^3 + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Pour tout x réel de l'intervalle $] -1; 1[$, en dérivant termes à termes la série entière

$\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, on obtient la série entière $\sum (-1)^{n+1} x^{2n}$. On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = 1 - \frac{1}{1 - (-x^2)} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Or, les primitives sur l'intervalle $] -1; 1[$ de la fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{1+x^2}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x - \arctan x + C$ où C est une constante réelle.

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1} = 0$ pour $x=0$, il vient $C=0$ et, finalement :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n-1} = -x - x^3 + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1} = -x - x^3 + x^2 (x - \arctan x) = -x - x^2 \arctan x$$

En raisonnant de façon similaire, on obtient :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$$

Finalement, pour tout x réel de l'intervalle $] -1 ; 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} (-x - x^2 \arctan x - \arctan x) = -\frac{1}{2} [x + (x^2 + 1) \arctan x]$$

Résultat final

$$\forall x \in] -1 ; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2 - 1} = -\frac{1}{2} [x + (x^2 + 1) \arctan x]$$

On a donc :

$$\forall x \in] -1 ; 1[, -\frac{1}{2} [x + (x^2 + 1) \arctan x] = -x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{35} + \dots$$