

Développer en série entière sur  $\mathbb{R}$  :

$$\ln \left[ (1+x)^4 + (1-x)^4 \right]$$

## Analyse

Comme bien souvent avec la fonction logarithme népérien, on cherche à se ramener à une expression de la forme  $\ln(1+x)$  ... de façon à pouvoir utiliser :  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ .

## Résolution

On a :

$$\begin{aligned} (1+x)^4 + (1-x)^4 &= 1 + \cancel{4x} + 6x^2 + \cancel{4x^3} + x^4 + 1 - \cancel{4x} + 6x^2 - \cancel{4x^3} + x^4 \\ &= 2 + 12x^2 + 2x^4 \\ &= 2(1 + 6x^2 + x^4) \end{aligned}$$

On pose  $X = x^2$  et on s'intéresse au trinôme :  $X^2 + 6X + 1$ .

Le discriminant réduit associé vaut :  $\Delta' = 3^2 - 1 \times 1 = 9 - 1 = 8$  et  $\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{2}$ .

On a alors les deux racines :  $X_1 = -3 - 2\sqrt{2}$  et  $X_2 = -3 + 2\sqrt{2}$ .

En remarquant que leur produit vaut 1 (elles sont donc inverses l'une de l'autre), on obtient la factorisation :

$$\begin{aligned} X^2 + 6X + 1 &= (X - X_1)(X - X_2) = X_1 \left( \frac{X}{X_1} - 1 \right) \times X_2 \left( \frac{X}{X_2} - 1 \right) \\ &= \underbrace{X_1 X_2}_{=1} (X_2 X - 1)(X_1 X - 1) \\ &= (1 - X_2 X)(1 - X_1 X) \\ &= \left[ 1 - (-3 - 2\sqrt{2})x^2 \right] \left[ 1 - (-3 + 2\sqrt{2})x^2 \right] \\ &= \left[ 1 + (3 + 2\sqrt{2})x^2 \right] \left[ 1 + (3 - 2\sqrt{2})x^2 \right] \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\ln\left[(1+x)^4+(1-x)^4\right] &= \ln\left[2(1+6x^2+x^4)\right] \\ &= \ln 2 + \ln\left\{\left[1+(3+2\sqrt{2})x^2\right]\left[1+(3-2\sqrt{2})x^2\right]\right\} \\ &= \ln 2 + \ln\left[1+(3+2\sqrt{2})x^2\right] + \ln\left[1+(3-2\sqrt{2})x^2\right]\end{aligned}$$

La fonction  $x \mapsto \ln\left[1+(3+2\sqrt{2})x^2\right]$  est développable en série entière pour tout  $x$  tel que  $(3+2\sqrt{2})x^2 \in ]-1; 1]$ , soit  $(3+2\sqrt{2})x^2 \in [0; 1]$ . On a :

$$0 \leq (3+2\sqrt{2})x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

Le rayon de convergence de la série entière associé à la fonction  $x \mapsto \ln\left[1+(3+2\sqrt{2})x^2\right]$  vaut donc  $R_1 = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$  et pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $\left[-\sqrt{3-2\sqrt{2}}; \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right]$ , on a :

$$\ln\left[1+(3+2\sqrt{2})x^2\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left[(3+2\sqrt{2})x^2\right]^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3+2\sqrt{2})^n}{n} x^{2n}$$

De façon analogue, on montre que le rayon de convergence de la série entière associée à la fonction  $x \mapsto \ln\left[1+(3-2\sqrt{2})x^2\right]$  vaut  $R_2 = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$  et pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $\left[-\sqrt{3+2\sqrt{2}}; \sqrt{3+2\sqrt{2}}\right]$ , on a :

$$\ln\left[1+(3-2\sqrt{2})x^2\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3-2\sqrt{2})^n}{n} x^{2n}$$

Ainsi, pour tout réel  $x$  de  $\left[-\sqrt{3-2\sqrt{2}}; \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right] = \left[-\min(R_1, R_2); \min(R_1, R_2)\right]$ , on a :

$$\begin{aligned}\ln\left[(1+x)^4+(1-x)^4\right] &= \ln 2 + \ln\left[1+(3+2\sqrt{2})x^2\right] + \ln\left[1+(3-2\sqrt{2})x^2\right] \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3+2\sqrt{2})^n}{n} x^{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3-2\sqrt{2})^n}{n} x^{2n} \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{n} x^{2n}\end{aligned}$$

---

## Résultat final

$$\forall x \in \left[ -\sqrt{3-2\sqrt{2}} ; \sqrt{3-2\sqrt{2}} \right]$$
$$\ln \left[ (1+x)^4 + (1-x)^4 \right] = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{n} x^{2n}$$