Soit $a$ un réel non nul.

Développer en série entière sur $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \sin(x+a)$$

## Analyse

Un peu de trigonométrie élémentaire et la connaissance de certains développements en séries entières usuels permettent facilement d'obtenir le résultat.

## Résolution

On a : $\sin(x+a) = \sin a \cos x + \cos a \sin x$.

Or, pour tout $x$ réel, on a les développements en séries entières usuels suivants :

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}
\sin(x+a) &= \sin a \cos x + \cos a \sin x \\
&= \sin a \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cos a \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left( \frac{\sin a}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos a}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)
\end{aligned}$$

## Résultat final

$$\sin(x+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left( \frac{\sin a}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos a}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)$$