

Pour  $x$  réel, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série entière.
2. Etudier la convergence pour  $x = \pm R$ .
3. Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow R \\ x < R}} f(x)$ .

---

## Analyse

Une étude au bord de l'intervalle ouvert de convergence pour une série entière  $\sum a_n x^n$  dont on obtient facilement un équivalent de  $a_n$ .

---

## Résolution

### Question 1.

Posons, pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $a_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

On a immédiatement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  puis  $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

D'où :  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1$ . La fonction racine

carré étant continue en 1, on en tire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ .

Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1.

$R = 1$

## Question 2.

→ Etude en  $x = -1$

On s'intéresse donc ici à la série de terme général  $(-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Comme on a  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{n}} \in ]0; 1] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , il vient immédiatement  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ .

Nous avons donc affaire à une série alternée.

La suite  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante et la fonction sinus est strictement croissante sur

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . On en déduit que la suite  $\left(\left|(-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement

décroissante.

De plus :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  et la fonction sinus est continue en 0. D'où :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = \sin 0 = 0$ .

Le critère spécial des séries alternées nous permet alors de conclure que la série

$\sum (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$  est convergente.

La fonction  $f$  est définie pour  $x = -1$ .

→ Etude en  $x = 1$

On s'intéresse donc ici à la série de terme général  $\sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Comme vu précédemment, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ . La série est donc à termes positifs.

De plus (cf. la question 1.) :  $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Or, la série de terme général  $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$  est une

série de Riemann divergente ( $\frac{1}{2} \leq 1$ ). On en déduit finalement que la série  $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$  est elle-même divergente.

La fonction  $f$  n'est pas définie pour  $x = 1$ .

### Question 3.

On cherche ici  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$ .

La fonction  $f$  est clairement croissante sur  $[0; 1[$ . Elle admet donc une limite en  $1^-$  (finie ou infinie) et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \sup_{x \in [0; 1[} f(x)$ .

Pour tout réel  $x$  dans  $[0; 1[$  et tout entier naturel  $N$  non nul, on a :

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^N x^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Donc : } \sup_{x \in [0; 1[} f(x) \geq \sup_{x \in [0; 1[} \sum_{n=1}^N x^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^N \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{En d'autres termes : } \forall N \in \mathbb{N}^*, \sup_{x \in [0; 1[} f(x) \geq \sum_{n=1}^N \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Comme  $\left( \sum_{n=1}^N \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$  (série de Riemann

divergente), on a finalement :  $\sup_{x \in [0; 1[} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$$