Démontrer que la somme de n variables aléatoires indépendantes deux à deux suivant la loi de Poisson de paramètre λ est une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Analyse

On a pratiquement affaire ici à une question de cours ! On procède classiquement en cherchant la loi de la somme, l'hypothèse d'indépendance est essentielle pour mener le calcul.

Résolution

Notons X_1, X_2, …, X_n les n variables aléatoires indépendantes deux à deux et suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

On s'intéresse à la variable aléatoire S définie par : $S = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Il vient alors, en utilisant successivement la formule des probabilités totales et l'indépendance des X_i :

$$\begin{aligned}
p(S=k) &= p\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \\
&= \sum_{k_1+k_2+...+k_n=k} p\left(X_1 = k_1 \cap X_2 = k_2 \cap ... \cap X_n = k_n\right) \\
&= \sum_{k_1+k_2+...+k_n=k} p\left(X_1 = k_1\right) p\left(X_2 = k_2\right) ... p\left(X_n = k_n\right) \\
&= \sum_{k_1+k_2+...+k_n=k} \prod_{i=1}^{n} p\left(X_i = k_i\right)
\end{aligned}$$

Or, chacune des variables aléatoires X_i suit une loi de Poisson de paramètre λ. On a donc :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ p\left(X_i = k_i\right) = \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
p(S=k) &= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} \prod_{i=1}^{n} p(X_i=k_i) \\
&= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} \\
&= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \\
&= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{k}}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \\
&= e^{-n\lambda}\lambda^k \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} \frac{1}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-n\lambda} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-n\lambda} \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n \text{ fois le nombre } 1.}{}^{k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-n\lambda} n^k \\
&= \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}
\end{aligned}$$

On identifia ainsi immédiatement la loi de S à une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

Résultat final

La loi suivie par la somme de n variables aléatoires indépendantes deux à deux et suivant une même loi de Poisson de paramètre λ est une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.