Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi de Poisson de paramètre λ. On rappelle que l'on a : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\mathrm{V}(\mathrm{X})=\lambda$.

1. Calculer les moments $m_2=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)$, $m_3=\mathrm{E}(\mathrm{X}^3)$ et $m_4=\mathrm{E}(\mathrm{X}^4)$.
2. Calculer les moments centrés $\mu_3=\mathrm{E}\left[\left(\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^3\right]$ et

   $\mu_4=\mathrm{E}\left[\left(\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^4\right]$.

Analyse

Quelques calculs (classiques) des premiers moments (non centrés et centrés) de la loi de Poisson.

Résolution

Question 1

On a, en tenant compte de $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)-\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2$:

$$m_2=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)=\mathrm{V}(\mathrm{X})+\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2=\lambda+\lambda^2=\lambda(\lambda+1)$$

Puis :

$$\begin{aligned}
m_3=\mathrm{E}(\mathrm{X}^3)&=\sum_{n=0}^{+\infty}k^3\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{n=1}^{+\infty}k^2\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\sum_{n=0}^{+\infty}(k+1)^2\frac{\lambda^{k+1}}{k!}e^{-\lambda}\\
&=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\left(k^2+2k+1\right)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda\left(\sum_{n=0}^{+\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+2\sum_{n=0}^{+\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)\\
&=\lambda\left[\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)+2\mathrm{E}(\mathrm{X})+1\right]=\lambda\left(\lambda+\lambda^2+2\lambda+1\right)\\
&=\lambda\left(\lambda^2+3\lambda+1\right)
\end{aligned}$$

En procédant de façon similaire :

$$\begin{aligned}
m_4 = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^4\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} k^4 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{+\infty} k^3 \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (k+1)^3 \frac{\lambda^{k+1}}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \left(k^3 + 3k^2 + 3k + 1\right) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \left(\sum_{n=0}^{+\infty} k^3 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) \\
&= \lambda \left[\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^3\right) + 3\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) + 3\mathrm{E}(\mathrm{X}) + 1 \right] \\
&= \lambda \left[\lambda\left(\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) + 3\lambda(\lambda+1) + 3\lambda + 1 \right] \\
&= \lambda\left(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda + 1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{gathered} m_2 = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) = \lambda(\lambda+1),\ m_3 = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^3\right) = \lambda\left(\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) \\ \text{et } m_4 = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^4\right) = \lambda\left(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda + 1\right) \end{gathered}}$$

Question 2

On a :

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= \mathrm{E}\left[\left(\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^3\right] \\
&= \mathrm{E}\left[X^3 - 3\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{X}^2 + 3\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 \mathrm{X} - \left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^3 \right] \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^3\right) - 3\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) + 3\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 \mathrm{E}(\mathrm{X}) - \left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^3 \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^3\right) - 3\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) + 2\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^3 \\
&= m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 \\
&= \lambda\left(\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) - 3\lambda\left(\lambda^2 + \lambda\right) + 2\lambda^3 \\
&= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda^3 \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\mu_4 &= \mathrm{E}\left[\left(\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^4\right] \\
&= \mathrm{E}\left[X^4-4\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{X}^3+6\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2\mathrm{X}^2-4\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^3\mathrm{X}+\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^4\right] \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^4\right)-4\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^3\right)+6\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)-4\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^3\mathrm{E}(\mathrm{X})+\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^4 \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^4\right)-4\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^3\right)+6\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)-3\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^4 \\
&= m_4-4m_1m_3+6m_1^2m_2-3m_1^4 \\
&= \lambda\left(\lambda^3+6\lambda^2+7\lambda+1\right)-4\lambda\times\lambda\left(\lambda^2+3\lambda+1\right)+6\lambda^2\left(\lambda^2+\lambda\right)-3\lambda^4 \\
&= \lambda^4+6\lambda^3+7\lambda^2+\lambda-4\lambda^4-12\lambda^3-4\lambda^2+6\lambda^4+6\lambda^3-3\lambda^4 \\
&= 3\lambda^2+\lambda
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mu_3=\lambda \text{ et } \mu_4=3\lambda^2+\lambda}$$