Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
Exprimer les paramètres de cette loi en fonction de l'espérance et de l'écart type de X.

Analyse

L'espérance et l'écart type de X s'expriment simplement en fonction de n et p …

Résolution

Considérons une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p :

$$\mathrm{X} \sim \mathscr{B}(n\,;p)$$

Elle admet pour espérance : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np$, et pour écart type : $\sigma_{\mathrm{X}} = \sqrt{np(1-p)}$.

On a donc : $\sigma_{\mathrm{X}}^2 = np(1-p) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) \times (1-p)$.

D'où : $1-p = \dfrac{\sigma_{\mathrm{X}}^2}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}$ et, finalement : $p = 1 - \dfrac{\sigma_{\mathrm{X}}^2}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}$.

Il vient alors : $n = \dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{p} = \dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{1-\dfrac{\sigma_{\mathrm{X}}^2}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}} = \dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{\dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{X})-\sigma_{\mathrm{X}}^2}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}} = \dfrac{\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2}{\mathrm{E}(\mathrm{X})-\sigma_{\mathrm{X}}^2}$.

Résultat final

Si une variable aléatoire X d'espérance $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et d'écart type σ_{X}

suit une loi binomiale de paramètres n et p, on a :

$$n = \frac{\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2}{\mathrm{E}(\mathrm{X})-\sigma_{\mathrm{X}}^2} \text{ et } p = 1 - \frac{\sigma_{\mathrm{X}}^2}{\mathrm{E}(\mathrm{X})}$$