On considère la variable aléatoire réelle X telle que :

$$\mathrm{X}(\Omega)=\{1;2;3;\ldots;n\}=[\![1;n]\!]$$

On suppose qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall k\in[\![1;n]\!],\ p(\mathrm{X}=k)=ak^2$$

1. Calculer a en fonction de n.

2. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X})$.

Analyse

Un exercice de base où la connaissance de deux sommes classiques est bien utile.

Résolution

Question 1.

Les probabilités $p(\mathrm{X}=k)$ sont positives si, et seulement si : $a\geq 0$.

Ensuite, il faut : $\sum_{k=1}^{n} p(\mathrm{X}=k)=1$.

On a :

$$\sum_{k=1}^{n} p(\mathrm{X}=k)=1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} ak^2=1$$

$$\Leftrightarrow a\sum_{k=1}^{n} k^2=1$$

$$\Leftrightarrow a\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=1$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$$

Finalement :

$$\boxed{a=\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}}$$

Question 2.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=1}^{n} k\times p(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} ak^3 = a\sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&= a\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}}$$