On considère la variable aléatoire réelle X telle que :

$$\mathrm{X}(\Omega)=\{1;2;3;...;n;n+1\}=[\![1;n+1]\!]$$

où n est un entier naturel non nul.

On suppose que l'on a :

$$\forall k\in[\![1;n]\!],\ p(\mathrm{X}=k)=\frac{1}{n^2}$$

1. Calculer $p(\mathrm{X}=n+1)$

2. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ en fonction de n.

Analyse

Un exercice de base où la connaissance d'une somme classique est bien utile.

Résolution

Question 1.

Il faut : $\sum_{k=1}^{n+1} p(\mathrm{X}=k)=1$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} p(\mathrm{X}=k)=1 &\quad\Leftrightarrow\\
\sum_{k=1}^{n} p(\mathrm{X}=k)+p(\mathrm{X}=n+1)=1 &\quad\Leftrightarrow\\
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}+p(\mathrm{X}=n+1)=1 &\quad\Leftrightarrow\\
n\times\frac{1}{n^2}+p(\mathrm{X}=n+1)=1 &\quad\Leftrightarrow\\
p(\mathrm{X}=n+1)=1-\frac{1}{n} &
\end{aligned}$$

Finalement :

$$p(\mathrm{X}=n+1)=1-\frac{1}{n}$$

Question 2.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=1}^{n+1} k\times p(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\times p(X=k)+(n+1)\times p(X=n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\times\frac{1}{n^2}+(n+1)\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\times\sum_{k=1}^{n} k+\frac{(n+1)(n-1)}{n} \\
&= \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n-1)}{n} \\
&= \frac{n+1}{2n}+\frac{(n+1)(n-1)}{n} \\
&= \frac{n+1}{2n}\left[1+2(n-1)\right] \\
&= \frac{(n+1)(2n-1)}{2n}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{(n+1)(2n-1)}{2n}$$