On considère une variable aléatoire réelle X suivant la loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

On définit la variable aléatoire réelle Y par : $\mathrm{Y}=\dfrac{1}{1+\mathrm{X}}$.

Calculer l'espérance $\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}\right)$ de Y.

Analyse

Un exercice d'application directe du théorème de transfert.

Résolution

D'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \times p\left(X=k\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \times \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \times \frac{n!}{k! \times \left(n-k\right)!} p^k \left(1-p\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{\left(k+1\right)! \times \left(n-k\right)!} p^k \left(1-p\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{n+1}\left(n+1\right)!}{\left(k+1\right)! \times \left(\left(n+1\right)-\left(k+1\right)\right)!} p^k \left(1-p\right)^{n-k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k \left(1-p\right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^{k-1} \left(1-p\right)^{n-(k-1)} = \frac{1}{\left(n+1\right)p} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k \left(1-p\right)^{n+1-k} \\
&= \frac{1}{\left(n+1\right)p} \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k \left(1-p\right)^{n+1-k}}_{=1} - \left(1-p\right)^{n+1} \right] \\
&= \frac{1-\left(1-p\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)p}
\end{aligned}$$

Résultat final

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$