Une urne contient 2 boules blanches et r boules rouges.
Les boules sont indiscernables au toucher.
On effectue des tirages sans remise dans cette urne en tirant, à chaque fois, une seule boule.
On note X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant dans l'urne à cet instant.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{E}(\mathrm{Y})$.

Analyse

Un exercice d'application du cours, prétexte à un premier calcul d'espérance faisant intervenir des sommes classiques. Le second découle directement de la linéarité de l'espérance.

Résolution

Question 1.

La variable aléatoire X peut prendre toutes les valeurs (entières) comprises entre 1 (la première boule tirée est blanche) et $r+1$ (on tire d'abord les r boules rouges puis une boule blanche). On a donc :

$$\mathrm{X}(\Omega)=\{1\,;2\,;3\,;\ldots;r\,;r+1\}=[\![1\,;r+1]\!]$$

On cherche maintenant à déterminer, pour tout entier dans $[\![1\,;r+1]\!]$: $p(\mathrm{X}=x)$.

Si on note R_i l'événement « la *i*ème boule tirée est rouge » et B_i l'événement « la *i*ème boule tirée est blanche », alors on a, en tenant compte du fait que l'urne contient un total de $r+2$ boules :

$$p(\mathrm{X}=1)=p(\mathrm{B}_1)=\frac{1}{r+2}$$

Puis :

$$p(\mathrm{X}=2)=p(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{B}_2)=\frac{r}{r+2}\times\frac{2}{r+1}$$

Puis :

$$p(X=3)=p(R_1\cap R_2\cap B_3)=\frac{r}{r+2}\times\frac{r-1}{r+1}\times\frac{2}{r}$$

Plus généralement :

$$\begin{aligned}
p(X=x)&=p(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_{x-1}\cap B_x)\\
&=\frac{\cancel{r}}{r+2}\times\frac{\cancel{r-1}}{r+1}\times\frac{\cancel{r-2}}{\cancel{r}}\times\frac{\cancel{r-3}}{\cancel{r-1}}\times\ldots\times\frac{\cancel{r-(x-2)+1}}{\cancel{r-(x-2)+2}}\times\frac{r-(x-1)+1}{\cancel{r-(x-1)+3}}\times\frac{2}{\cancel{r-(x-1)+2}}\\
&=2\frac{r-(x-1)+1}{(r+2)(r+1)}\\
&=2\frac{r-x+2}{(r+2)(r+1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in[\![1\,;r+1]\!],\ p(X=x)=2\frac{r+2-x}{(r+2)(r+1)}}$$

A titre de vérification partielle, on calculera $\sum_{x=1}^{r+1}p(X=x)$ pour obtenir 1.

Question 2.

On a :

$$\begin{aligned}
E(X)&=\sum_{x=1}^{r+1}x\times p(X=x)\\
&=\sum_{x=1}^{r+1}x\times 2\frac{r+2-x}{(r+2)(r+1)}\\
&=\frac{2}{(r+2)(r+1)}\sum_{x=1}^{r+1}x(r+2-x)\\
&=\frac{2}{(r+2)(r+1)}\left[(r+2)\sum_{x=1}^{r+1}x-\sum_{x=1}^{r+1}x^2\right]\\
&=\frac{2}{(r+2)(r+1)}\left[(r+2)\frac{(r+1)(r+2)}{2}-\frac{(r+1)(r+2)(2(r+1)+1)}{6}\right]\\
&=\frac{2}{(r+2)(r+1)}\times\frac{(r+1)(r+2)}{2}\times\left[(r+2)-\frac{2r+3}{3}\right]\\
&=r+2-\frac{2r}{3}-1\\
&=1+\frac{r}{3}
\end{aligned}$$

Si $X = x$ alors il y a $x-1$ boules rouges qui ont été tirées avant la première boule blanche. Il reste alors $r-(x-1)=r+1-x$ boules rouges dans l'urne. On a donc : $Y=r+1-X$.

La linéarité de l'espérance nous permet alors d'écrire directement :

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\mathrm{E}(r+1-X)=r+1-\mathrm{E}(\mathrm{X})=r+1-\left(1+\frac{r}{3}\right)=\frac{2r}{3}$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X})=1+\frac{r}{3} \text{ et } \mathrm{E}(\mathrm{Y})=\frac{2r}{3}}$$