

On considère l'ensemble des n premiers entiers naturels non nuls $\llbracket 1; n \rrbracket = \{1; 2; \dots; n\}$. On choisit au hasard (on suppose les tirages équiprobables) successivement et avec remise deux entiers dans cette ensemble.

On définit trois variables aléatoires X , Y et Z de la façon suivante :

- X correspond au plus grand des deux entiers obtenus.
- Y correspond au plus petit des deux entiers obtenus.
- $Z = X - Y$.

1. Pour chacune des lois X et Y , donner la fonction de répartition, la loi de probabilité, l'espérance et la variance.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y) . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de Z puis donner son espérance et sa variance. En déduire $\text{cov}(X, Y)$.

Analyse

Un exercice complet autour des notions de couple de variables aléatoires, d'espérance, de variance et de covariance. La situation proposée est générale puisque le nombre n n'est pas fixé. Les calculs sont donc fondamentalement des calculs littéraux constituant un excellent entraînement. On peut-même facilement effectuer des simulations numériques à partir de cette situation.

Résolution

Question 1.

A titre de préambule, soulignons qu'il y a n^2 façons de choisir deux entiers successivement avec remise dans l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ (n possibilités pour le premier et autant pour le second puisqu'il y a remise).

Variable aléatoire X

Les deux entiers choisis pouvant tous les deux être égaux en prenant n'importe quelle valeur dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, le support de la loi X est donc cet ensemble : $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

Notons F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

X étant discrète, on cherche, pour tout entier k dans $\llbracket 1; n \rrbracket$: $F_X(k) = P(X \leq k)$.

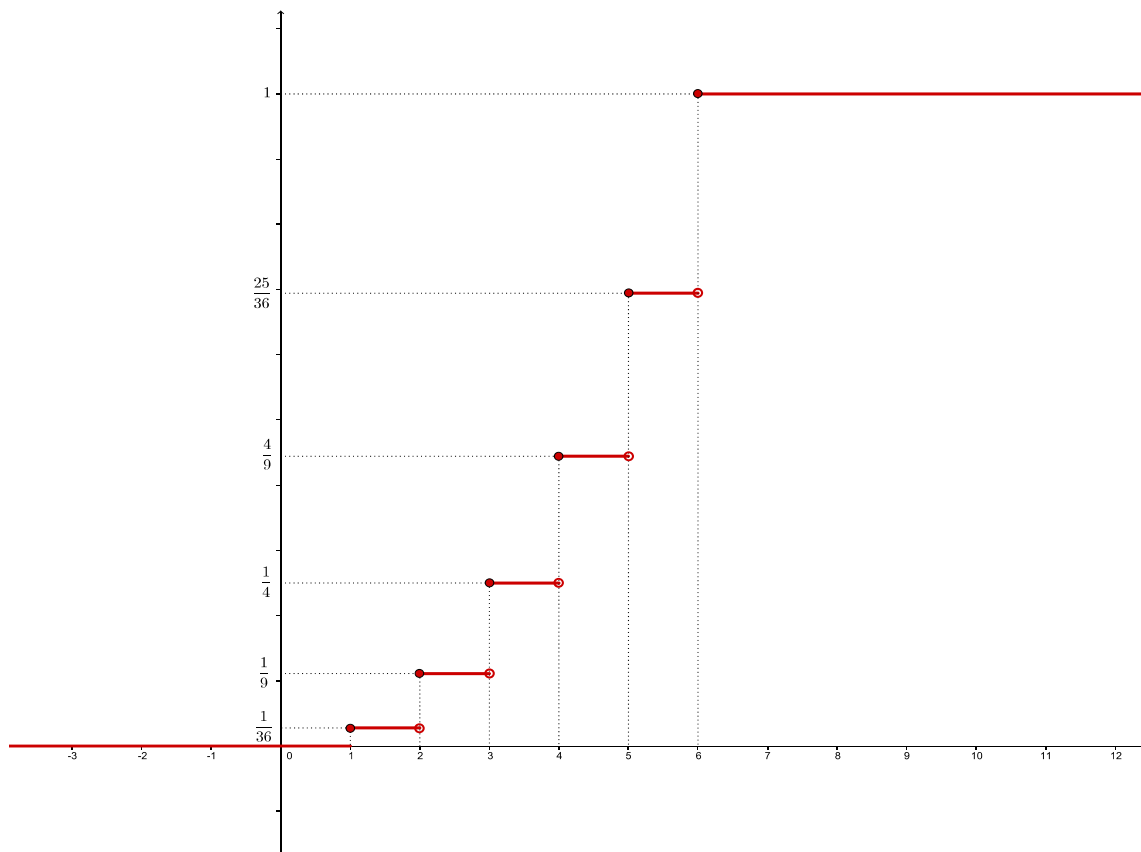
Si le plus grand des deux entiers choisis est inférieur ou égal à k alors les deux entiers le sont. Réciproquement, si les deux entiers choisis sont tous deux inférieurs ou égaux à k , alors le plus grand d'entre eux le sera également.

En définitive, l'événement « $X \leq k$ » est réalisé si, et seulement si, les deux entiers choisis sont inférieurs ou égaux à k .

La probabilité $P(X \leq k)$ est donc égale à la probabilité de choisir les deux entiers dans $\llbracket 1; k \rrbracket$. Comme il y a k^2 façons de choisir deux entiers successivement avec remise dans cet ensemble, on obtient finalement :

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \frac{k^2}{n^2}$$

Pour $n = 6$ par exemple, on obtiendra :



On a alors : $P(X=1) = P(X \leq 1) = F_X(1) = \frac{1^2}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ et pour tout entier k de $\llbracket 2; k \rrbracket$:

$$P(X=k) = F_X(k) - F_X(k-1) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$$

On note que l'expression obtenue redonne $P(X=1) = \frac{1}{n^2}$ lorsque l'on remplace k par 1.

On a donc finalement :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(X=k) = \frac{2k-1}{n^2}$$

On a alors, en notant $E(X)$ l'espérance de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n k \times P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^n k \times \frac{2k-1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(2 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{6} (2(2n+1) - 3) \\ &= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n} \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

Pour ce qui est de la variance, notée $V(X)$:

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 \times P(X=k) - \left[\frac{(n+1)(4n-1)}{6n} \right]^2 \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 \times \frac{2k-1}{n^2} - \frac{(n+1)^2(4n-1)^2}{36n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(2 \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k^2 \right) - \frac{(n+1)^2(4n-1)^2}{36n^2} \end{aligned}$$

On tenant alors compte de $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, il vient :

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
 &= \frac{1}{n^2} \left(2 \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k^2 \right) - \frac{(n+1)^2(4n-1)^2}{36n^2} \\
 &= \frac{1}{n^2} \left(2 \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \frac{(n+1)^2(4n-1)^2}{36n^2} \\
 &= \frac{n+1}{36n^2} (18n^2(n+1) - 6n(2n+1) - (n+1)(4n-1)^2) \\
 &= \frac{n+1}{36n^2} (18n^3 + 18n^2 - 12n^2 - 6n - (n+1)(16n^2 - 8n + 1)) \\
 &= \frac{n+1}{36n^2} (18n^3 + 6n^2 - 6n - (16n^3 - 8n^2 + n + 16n^2 - 8n + 1)) \\
 &= \frac{n+1}{36n^2} (18n^3 + 6n^2 - 6n - (16n^3 + 8n^2 - 7n + 1)) \\
 &= \frac{n+1}{36n^2} (2n^3 - 2n^2 + n - 1) \\
 &= \frac{n+1}{36n^2} (n-1)(2n^2 + 1) \\
 &= \frac{(n^2 - 1)(2n^2 + 1)}{36n^2}
 \end{aligned}$$

$$V(X) = \frac{(n^2 - 1)(2n^2 + 1)}{36n^2}$$

Variable aléatoire Y

Les deux entiers choisis pouvant tous les deux être égaux en prenant n'importe quelle valeur dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, le support de la loi Y est donc, comme précédemment, l'ensemble :

$$Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket.$$

Notons F_Y la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.

Y étant discrète, on cherche, pour tout entier k dans $\llbracket 1; n \rrbracket$:

$$F_Y(k) = P(Y \leq k) = 1 - P(Y > k)$$

Si le plus petit des deux entiers choisis est strictement supérieur à k alors les deux entiers le sont.

Réciproquement, si les deux entiers choisis sont tous deux strictement supérieurs à k , alors le plus petit d'entre eux le sera également.

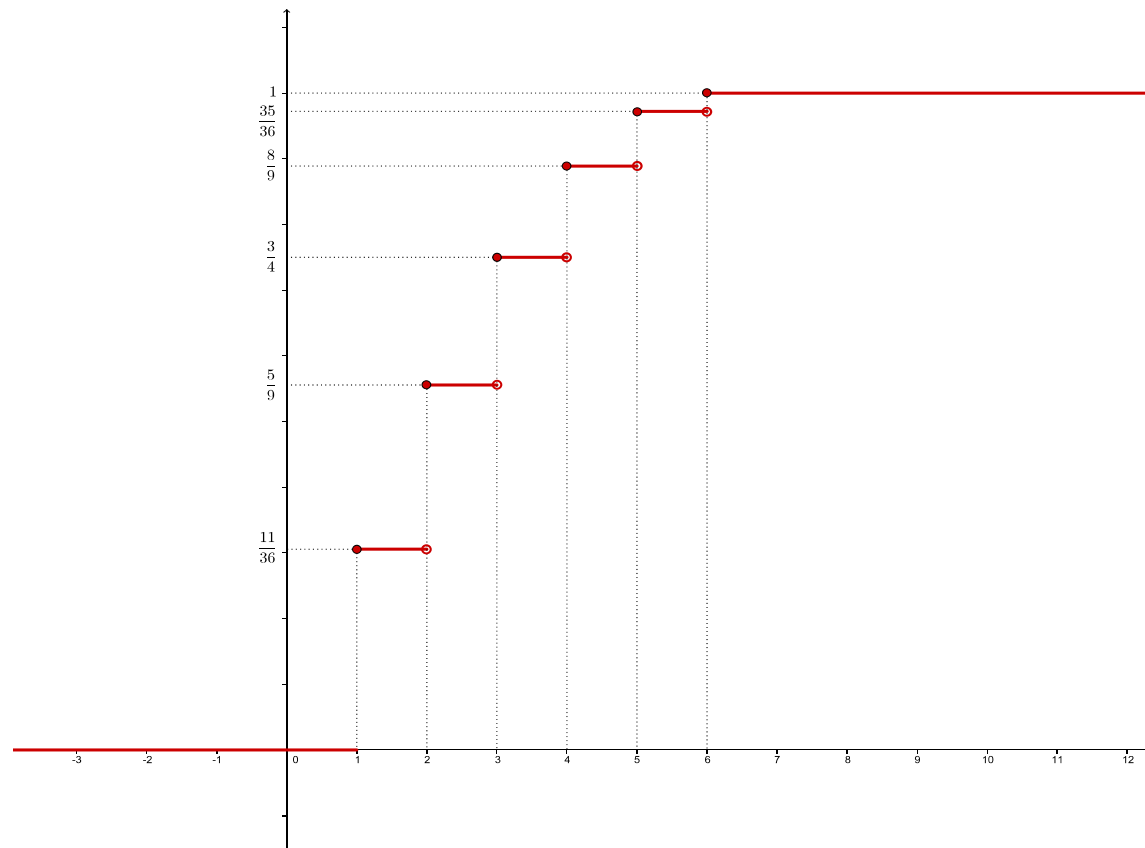
En définitive, l'événement « $Y > k$ » est réalisé si, et seulement si, les deux entiers choisis sont strictement supérieurs à k .

Pour tout entier k dans $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$, la probabilité $P(Y > k)$ est donc égale à la probabilité de choisir les deux entiers dans $\llbracket k+1; n \rrbracket$. Comme il y a $[n - (k+1) + 1]^2 = (n-k)^2$ façons de choisir deux entiers successivement avec remise dans cet ensemble, on obtient finalement :

$$F_Y(k) = P(Y \leq k) = 1 - \frac{(n-k)^2}{n^2} = \frac{n^2 - (n-k)^2}{n^2} = \frac{k(2n-k)}{n^2}$$

Remarque : l'expression obtenue reste valable pour $k = n$ puisque l'on a immédiatement $P(Y > k) = 0$ et $F_Y(n) = P(Y \leq n) = 1$.

Pour $n = 6$ par exemple, on obtiendra :



On a alors : $P(Y=1) = P(Y \leq 1) = F_Y(1) = \frac{2n-1}{n^2}$ et pour tout entier k de $\llbracket 2; n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= F_Y(k) - F_Y(k-1) \\ &= 1 - \frac{(n-k)^2}{n^2} - \left[1 - \frac{(n-k+1)^2}{n^2} \right] \\ &= \frac{(n-k+1)^2 - (n-k)^2}{n^2} \\ &= \frac{2n+1-2k}{n^2} \end{aligned}$$

On note que l'expression obtenue redonne $P(Y=1) = \frac{2n-1}{n^2}$ lorsque l'on remplace k par 1.

On a donc finalement :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(Y=k) = \frac{2n+1-2k}{n^2}$$

On a alors, en notant $E(Y)$ l'espérance de Y :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^n k \times P(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^n k \times \frac{2n+1-2k}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(-2 \sum_{k=1}^n k^2 + (2n+1) \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(-2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1) \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} (-2+3) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \end{aligned}$$

$$E(Y) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

Pour ce qui est de la variance, notée $V(Y)$:

$$\begin{aligned}
 V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 \times P(Y=k) - \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \right]^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 \times \frac{2n+1-2k}{n^2} - \frac{(n+1)^2 (2n+1)^2}{36n^2} \\
 &= \frac{1}{n^2} \left((2n+1) \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k^3 \right) - \frac{(n+1)^2 (2n+1)^2}{36n^2} \\
 &= \frac{1}{n^2} \left((2n+1) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n^2 (n+1)^2}{4} \right) - \frac{(n+1)^2 (2n+1)^2}{36n^2} \\
 &= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{6} \left((2n+1)^2 - 3n(n+1) \right) - \frac{(n+1)^2 (2n+1)^2}{36n^2} \\
 &= \frac{n+1}{6n} (4n^2 + 4n + 1 - 3n^2 - 3n) - \frac{(n+1)^2 (2n+1)^2}{36n^2} \\
 &= \frac{n+1}{6n} (n^2 + n + 1) - \frac{(n+1)^2 (2n+1)^2}{36n^2} \\
 &= \frac{n+1}{36n^2} \left[6n(n^2 + n + 1) - (n+1)(2n+1)^2 \right] \\
 &= \frac{n+1}{36n^2} \left[6n^3 + 6n^2 + 6n - (n+1)(4n^2 + 4n + 1) \right] \\
 &= \frac{n+1}{36n^2} (6n^3 + 6n^2 + 6n - 4n^3 - 4n^2 - n - 4n^2 - 4n - 1) \\
 &= \frac{n+1}{36n^2} (2n^3 - 2n^2 + n - 1)
 \end{aligned}$$

La somme des coefficients de $2n^3 - 2n^2 + n - 1$ étant égale à 0, 1 est racine du polynôme $2X^3 - 2X^2 + X - 1$ (attention « X » désigne ici l'indéterminée et n'a rien à voir avec la variable aléatoire X !) et on peut donc factoriser par $n-1$. On peut aussi procéder comme suit : $2n^3 - 2n^2 + n - 1 = 2n^2(n-1) + (n-1) = (n-1)(2n^2 + 1)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 V(Y) &= \frac{n+1}{36n^2} (2n^3 - 2n^2 + n - 1) \\
 &= \frac{n+1}{36n^2} (n-1)(2n^2 + 1) \\
 &= \frac{(n^2 - 1)(2n^2 + 1)}{36n^2}
 \end{aligned}$$

$$V(Y) = \frac{(n^2 - 1)(2n^2 + 1)}{36n^2}$$

On remarque que l'on a : $V(X) = V(Y)$.

Question 2.

Pour tout couple (i, j) dans $\llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$, on cherche $P(X = i \text{ et } Y = j) = p_{ij}$.

- Si $i < j$, on a immédiatement $p_{ij} = 0$ (rappelons que X désigne le plus grand des deux entiers obtenus !).
- Si $i = j$, on est dans la situation où les deux nombres obtenus sont égaux et la probabilité correspondante vaut immédiatement $p_{ij} = \frac{1}{n^2}$ (une seule possibilité).
- Si $i > j$, deux tirages conduisent à la réalisation de l'événement « $X = i$ et $Y = j$ » : i puis j et j puis i . On a donc : $p_{ij} = \frac{2}{n^2}$.

Loi du couple (X, Y) :

pour tout couple (i, j) dans $\llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$:

- Si $i < j$, $p_{ij} = 0$.
- Si $i = j$, $p_{ij} = \frac{1}{n^2}$.
- Si $i > j$, $p_{ij} = \frac{2}{n^2}$.

D'après la question 1, on a : $P(X = i) = \frac{2i-1}{n^2}$ et $P(Y = j) = \frac{2n+1-2j}{n^2}$.

En général, on : $P(X = i) \times P(Y = i) = \frac{2i-1}{n^2} \times \frac{2n+1-2i}{n^2} \neq \frac{1}{n^2} = P(X = i \text{ et } Y = i)$.

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{2i-1}{n^2} \times \frac{2n+1-2i}{n^2} &= \frac{1}{n^2} \\ \Leftrightarrow (2i-1)(2n+1-2i) &= n^2 \\ \Leftrightarrow 4in + 2i - 4i^2 - 2n - 1 + 2i &= n^2 \\ \Leftrightarrow 4i^2 - 4(n+1)i + (n^2 + 2n + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4i^2 - 4(n+1)i + (n+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow [2i - (n+1)]^2 &= 0 \end{aligned}$$

La dernière égalité ne peut être vérifiée que lorsque n est impair. Elle ne l'est alors que pour une seule valeur de i : $\frac{n+1}{2}$.

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Question 3.

On a : $Z = X - Y$.

Lorsque X et Y prennent la même valeur, on obtient la plus petite valeur de Z : 0.

Lorsque X prend la valeur n et Y prend la valeur 1, on obtient la plus grande valeur de Z : $n - 1$.

Plus généralement, lorsque X prend la valeur n , Y peut prendre toutes les valeurs de $\llbracket 1; n \rrbracket$ et Z prendra toutes les valeurs de $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$.

$$Z(\Omega) = \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$$

On a immédiatement :

$$P(Z = 0) = \sum_{i=1}^n P(X = i \text{ et } Y = i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Ensuite, pour tout entier naturel k dans $\llbracket 1; n - 1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X = k + 1 \text{ et } Y = 1) + P(X = k + 2 \text{ et } Y = 2) + \dots \\ &\quad \dots + P(X = k + (n - k) \text{ et } Y = n - k) \\ &= \sum_{i=1}^{n-k} P(X = k + i \text{ et } Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-k} \frac{2}{n^2} \\ &= (n - k) \frac{2}{n^2} \\ &= 2 \frac{n - k}{n^2} \end{aligned}$$

La variable aléatoire Z est définie sur $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$.

- $P(Z = 0) = \frac{1}{n}$.
- $\forall k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket, P(Z = k) = 2 \frac{n - k}{n^2}$.

On a ensuite :

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X) - E(Y) \\ &= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \\ &= \frac{n+1}{6n}(4n-1-2n-1) \\ &= \frac{n+1}{6n}(2n-2) \\ &= \frac{n^2-1}{3n} \end{aligned}$$

$$E(Z) = \frac{n^2-1}{3n}$$

Remarque : on pouvait bien sûr également calculer $E(Z)$ en utilisant la loi de Z .

$$\begin{aligned} V(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \times P(Z=k) - \left(\frac{n^2-1}{3n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \times \frac{2(n-k)}{n^2} - \frac{(n^2-1)^2}{9n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(2n \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \right) - \frac{(n^2-1)^2}{9n^2} \\ &= \frac{1}{9n^2} \left(18n \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 18 \frac{(n-1)^2 n^2}{4} - (n^2-1)^2 \right) \\ &= \frac{1}{18n^2} \left[6(n-1)n^2(2n-1) - 9(n-1)^2 n^2 - 2(n-1)^2(n+1)^2 \right] \\ &= \frac{n-1}{18n^2} \left[6n^2(2n-1) - 9(n-1)n^2 - 2(n-1)(n+1)^2 \right] \\ &= \frac{n-1}{18n^2} \left[12n^3 - 6n^2 - 9n^3 + 9n^2 - 2(n-1)(n^2+2n+1) \right] \\ &= \frac{n-1}{18n^2} \left[3n^3 + 3n^2 - 2n^3 - 2n^2 + 2n + 2 \right] = \frac{n-1}{18n^2} \left[n^3 + n^2 + 2n + 2 \right] \\ &= \frac{n-1}{18n^2} \left[n^2(n+1) + 2(n+1) \right] = \frac{n-1}{18n^2} (n+1)(n^2+2) \\ &= \frac{(n^2-1)(n^2+2)}{18n^2} \end{aligned}$$

$$V(Z) = \frac{(n^2-1)(n^2+2)}{18n^2}$$

On a enfin :

$$V(Z) = V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{cov}(X, Y) = 2V(X) - 2\text{cov}(X, Y)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= V(X) - \frac{1}{2}V(Z) \\ &= \frac{(n^2 - 1)(2n^2 + 1)}{36n^2} - \frac{1}{2} \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{18n^2} \\ &= \frac{n^2 - 1}{36n^2} (2n^2 + 1 - n^2 - 2) \\ &= \frac{n^2 - 1}{36n^2} (n^2 - 1) \\ &= \left(\frac{n^2 - 1}{6n} \right)^2\end{aligned}$$

$$\text{cov}(X, Y) = \left(\frac{n^2 - 1}{6n} \right)^2$$