Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $\mathbb{Z}$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ p(\mathrm{X}=n)=\frac{\alpha}{3^{|n|}}$$

où α est un réel.

1. Déterminer α de telle sorte que la condition ci-dessus définisse bien une loi de probabilité.
2. Calculer alors l'espérance et la variance de X.

Analyse

Un exercice d'application directe du cours qui permet de revoir quelques techniques calculatoires classiques (cf. le calcul de la variance).

Résolution

Question 1.

La condition $\forall n \in \mathbb{Z},\ p(\mathrm{X}=n)=\frac{\alpha}{3^{|n|}}$ définit une loi de probabilité si, et seulement si, on a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z},\ p(\mathrm{X}=n) \in [0\,;1] \\ \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} p(\mathrm{X}=n)=1 \end{cases}$$

On a $\forall n \in \mathbb{Z}, 3^{|n|}>0$. On aura donc $p(\mathrm{X}=n)\geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 0$.

Par ailleurs, on a également $\forall n \in \mathbb{Z}, 3^{|n|} \geq 3^0 = 1$ et donc $\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{1}{3^{|n|}} \leq \frac{1}{3^0}=1$.

Avec α strictement positif, il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(\mathrm{X}=n)\leq 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\alpha}{3^{|n|}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{3^0}\leq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq 1.$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{Z},\ p(\mathrm{X}=n)\in[0\,;1] \Leftrightarrow \alpha \in [0\,;1]$.

On veut ensuite : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p(\mathrm{X}=n)=1$.

On a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} p(\mathrm{X}=n)=1 \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha}{3^{|n|}}=1 \Leftrightarrow \alpha\times\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{3^{|n|}}=1$$

Or, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{3^{|n|}}=\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^{|n|}}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}} \frac{1}{3^{|n|}}=\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^{n}}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3^{|-n|}}=2\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^{n}}-1=2\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1=2\times\frac{1}{\frac{2}{3}}-1=2$$

Finalement : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p(\mathrm{X}=n)=1 \Leftrightarrow \alpha\times\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{3^{|n|}}=1 \Leftrightarrow 2\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$.

En définitive, $\alpha=\frac{1}{2}$ et la loi de probabilité de X est définie par :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ p(\mathrm{X}=n)=\frac{1}{2\times 3^{|n|}}$$

Pour $\alpha=\frac{1}{2}$, la condition $\forall n\in\mathbb{Z},\ p(\mathrm{X}=n)=\frac{\alpha}{3^{|n|}}$ définit bien une loi de probabilité pour la variable aléatoire X.

Question 2.

On a, par définition de l'espérance : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\times p(\mathrm{X}=n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\times\frac{1}{2\times 3^{|n|}}=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\times\frac{1}{3^{|n|}}$.

Or : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\times\frac{1}{3^{|n|}}=\sum_{n\in\mathbb{N}} n\times\frac{1}{3^{n}}+\sum_{n\in\mathbb{N}}(-n)\times\frac{1}{3^{|-n|}}=\sum_{n\in\mathbb{N}} n\times\frac{1}{3^{n}}-\sum_{n\in\mathbb{N}} n\times\frac{1}{3^{n}}=0$.

→ L'espérance de la variable aléatoire X est nulle.

On a ensuite :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{X})&=E(X^2)-\cancel{(E(X))^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\times p(\mathrm{X}=n)\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\times\frac{1}{2\times 3^{|n|}}=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\times\frac{1}{3^{|n|}}=\frac{1}{2}\times 2\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\times\frac{1}{3^{|n|}}.\\&=\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\times\frac{1}{3^{n}}\end{aligned}$$

Pour tout x réel dans l'intervalle $]-1;1[$, on a le résultat classique :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

A partir de $f(x)=\sum_{n=0}^{N} x^n = 1+x+x^2+...+x^N = \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$, il vient, pour $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{N} n\,x^{n-1} = 1+2\times x+...+N\times x^{N-1} \\ &= \frac{-(N+1)x^N\times(1-x)-(1-x^{N+1})\times(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-(N+1)x^N - Nx^{N+1}}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

En tenant compte de $\lim\limits_{N\to+\infty}(N+1)x^N = \lim\limits_{N\to+\infty} Nx^{N+1} = 0$, on obtient (à savoir retrouver rapidement !) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = 1+2\times x+3\times x^2... = \frac{1}{(1-x)^2}$$

En notant que l'on a : $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)x^n$, il vient :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left[(n+1)-1\right]x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)x^n - \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = \frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x} = \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Pour $N \geq 2$, il vient ensuite :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=2}^{N} n(n-1)x^{n-2} = 2+6\times x+...+N(N-1)\times x^{N-2} \\ &= \frac{2-N(N+1)x^{N-1}-2(N+1)x^N+N(N-1)x^{N+1}}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

En tenant compte de $\lim\limits_{N\to+\infty} N(N+1)x^{N-1} = \lim\limits_{N\to+\infty}(N+1)x^N = \lim\limits_{N\to+\infty} N(N-1)x^{N+1} = 0$, on obtient cette fois :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = 2+6\times x+12\times x^2... = \frac{2}{(1-x)^3}$$

En notant que l'on a : $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)(n+2)x^n$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 x^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\left[(n+1)(n+2)-3n-2\right]x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)(n+2)x^n - 3\sum_{n\in\mathbb{N}} nx^n - 2\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n \\ &= \frac{2}{(1-x)^3}-\frac{3x}{(1-x)^2}-\frac{2}{1-x} = \frac{2-3x(1-x)-2(1-x)^2}{(1-x)^3} \\ &= \frac{x^2+x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Avec $x = \frac{1}{3}$, on obtient :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 \times \frac{1}{3^n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{27}} = \frac{4}{9} \times \frac{27}{8} = \frac{3}{2}$$

→ La variance de la variable aléatoire X est égale à $\frac{3}{2}$.

L'espérance et la variance de la variable aléatoire X sont respectivement égales à 0 et à $\frac{3}{2}$.