Soit $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, P\left(X_n=0\right)=1-p \text{ et } P\left(X_n=1\right)=p$$

où p est un réel dans $\left]0;1\right[$.

On définit alors les suites $\left(Y_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(V_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suit :

pour tout entier naturel non nul *n*,

$$Y_n = X_n X_{n+1}$$
$$S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$$
$$V_n = Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$$

1. Pour tout entier naturel non nul *n*, calculer les espérances et les variances des variables aléatoires S_n et V_n.
2. Pour tout entier naturel non nul *n*, calculer la covariance des variables aléatoires S_n et V_n.

Analyse

Comme on peut (probablement …) s'y attendre, ce sont un calcul de variance (celui de la variable V_n) et celui de la covariance de la deuxième question qui sont les plus délicats. On doit cependant garder présent à l'esprit le fait que les X_n sont indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli. De fait, elles sont d'un « maniement » relativement aisé.

Résolution

Question 1.

En utilisant la linéarité de l'espérance, il vient :

$$E(S_n)=E(X_1+X_2+...+X_n)=E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)$$

Les variables aléatoires X_k suivant la même loi de Bernoulli de paramètre *p*, on a immédiatement : $\forall p\in\mathbb{N}^*, E(X_k)=p$ $(=0\times(1-p)+1\times p)$. Il vient alors :

$$E(S_n)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\sum_{k=1}^{n}p=np$$

Remarque : on retrouve un résultat classique, la variable aléatoire S_n suivant, comme somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre, une loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

Les variables aléatoires X_k étant indépendantes, on a :

$$V(S_n)=V(X_1+X_2+...+X_n)=V\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}V(X_k)$$

Classiquement, on a cette fois : $\forall p\in\mathbb{N}^*, V(X_k)=p(1-p)$

$(=E(X_k^2)-(E(X_k))^2=0^2\times(1-p)+1^2\times p-p^2)$. Il vient alors :

$$V(S_n)=\sum_{k=1}^{n}V(X_k)=\sum_{k=1}^{n}p(1-p)=np(1-p)$$

Comme précédemment, on peut remarquer que l'on retrouve classiquement la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

$$\boxed{E(S_n)=np \text{ et } V(S_n)=np(1-p).}$$

Comme précédemment :

$$E(V_n)=E(Y_1+Y_2+...+Y_n)=E\left(\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)=\sum_{k=1}^{n}E(Y_k)$$

Pour tout entier naturel *k*, les variables aléatoires X_k et X_{k+1} sont indépendantes. Il vient donc : $E(Y_k)=E(X_k X_{k+1})=E(X_k)\times E(X_{k+1})=p\times p=p^2$. Ainsi :

$$E(V_n)=\sum_{k=1}^{n} E(Y_k)=\sum_{k=1}^{n} p^2=np^2$$

On a ensuite : $V(V_n)=E(V_n^2)-(E(V_n))^2$.

Il nous faut donc calculer $E(V_n^2)$.

On a :

$$E(V_n^2)=E\left((Y_1+Y_2+...+Y_n)^2\right)=E\left(\sum_{1\le i\le j\le n} Y_iY_j\right)=\sum_{1\le i\le j\le n} E(Y_iY_j)=\sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n} E(Y_iY_j)$$

→ Calcul de $\sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2)$

On a $Y_i^2=X_i^2X_{i+1}^2$.

Il est immédiat que pour tout entier naturel non nul *i*, la variable aléatoire X_i^2 suit la même loi que la variable aléatoire X_i.

Ensuite, les variables aléatoires X_i et X_{i+1} ne prenant que les valeurs 0 ou 1, il en va de même pour la variable aléatoire Y_i^2.

Enfin, on note que l'on a : $Y_i^2=1 \Leftrightarrow X_i^2X_{i+1}^2=1 \Leftrightarrow X_iX_{i+1}=1 \Leftrightarrow (X_i=1)$ et $(X_{i+1}=1)$.

En tenant compte de l'indépendance des variables aléatoires X_i et X_{i+1}, il vient :

$$P(Y_i^2=1)=P\left((X_i=1)\cap(X_{i+1}=1)\right)=P(X_i=1)\times P(X_{i+1}=1)=p\times p=p^2$$

Finalement, la loi de la variable aléatoire Y_i^2 est :

$$P(Y_i^2=1)=p^2 \text{ et } P(Y_i^2=0)=1-p^2$$

On en tire immédiatement : $E(Y_i^2)=p^2$ et, enfin : $\sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2)=\sum_{i=1}^{n} p^2=np^2$.

→ Calcul de $\sum_{1\le i<j\le n} E(Y_iY_j)$

On a : $Y_iY_j=X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}$.

Comme $j\ge i+1$, on va distinguer deux situations suivant que l'on a $j=i+1$ ou $j>i+1$.

Si $j=i+1$, on a : $Y_iY_j=Y_iY_{i+1}=X_iX_{i+1}X_{i+1}X_{i+1+1}=X_iX_{i+1}^2X_{i+2}$.

Ici encore, la variable aléatoire $X_iX_{i+1}^2X_{i+2}$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

On a : $X_iX_{i+1}^2X_{i+2}=1 \Leftrightarrow (X_i=1)$ et $(X_{i+1}=1)$ et $(X_{i+2}=1)$.

En tenant compte de l'indépendance des variables aléatoires X_i, X_{i+1} et X_{i+2}, il vient :

$$\begin{aligned}P\left(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}=1\right)&=P\left(\left(X_i=1\right)\cap\left(X_{i+1}=1\right)\cap\left(X_{i+2}=1\right)\right)\\&=P\left(X_i=1\right)\times P\left(X_{i+1}=1\right)\times P\left(X_{i+2}=1\right)\\&=p\times p\times p\\&=p^3\end{aligned}$$

Finalement, la loi de la variable aléatoire $X_iX_{i+1}^2X_{i+2}$ est :

$$P\left(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}=1\right)=p^3 \text{ et } P\left(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}=0\right)=1-p^3$$

On en tire immédiatement : $E\left(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}\right)=p^3$.

Comme i varie dans $[\![1\,;n-1]\!]$, on a $n-1$ variables aléatoires de la forme $X_iX_{i+1}^2X_{i+2}$ et il vient finalement : $\sum_{i=1}^{n-1}E\left(Y_iY_{i+1}\right)=\sum_{i=1}^{n-1}E\left(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}\right)=\sum_{i=1}^{n-1}p^3=\left(n-1\right)p^3$.

Si $j>i+1$, on a : $Y_iY_j=X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}$.
Ici encore, la variable aléatoire $X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.
On a : $X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}=1\Leftrightarrow\left(X_i=1\right)$ et $\left(X_{i+1}=1\right)$ et $\left(X_j=1\right)$ et $\left(X_{j+1}=1\right)$.
En tenant compte de l'indépendance des variables aléatoires X_i, X_{i+1}, X_j et X_{j+1}, il vient :

$$\begin{aligned}P\left(X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}=1\right)&=P\left(\left(X_i=1\right)\cap\left(X_{i+1}=1\right)\cap\left(X_j=1\right)\cap\left(X_{j+1}=1\right)\right)\\&=P\left(X_i=1\right)\times P\left(X_{i+1}=1\right)\times P\left(X_j=1\right)\times P\left(X_{j+1}=1\right)\\&=p\times p\times p\times p\\&=p^4\end{aligned}$$

Finalement, la loi de la variable aléatoire $X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}$ est :

$$P\left(X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}=1\right)=p^4 \text{ et } P\left(X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}=0\right)=1-p^4$$

On en tire immédiatement : $E\left(X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}\right)=p^4$.

On a : $1\le i<j\le n$ et $j>i+1$. Ainsi, i varie dans $[\![1\,;n-2]\!]$ et pour chaque valeur de i dans cet intervalle, on a $n-i-1$ valeurs possibles pour j : $i+2, i+3, ..., n$.
Le nombre de variables aléatoires de la forme $X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}$ avec $j>i+1$ est donc égal à :

$$\sum_{i=1}^{n-2}\left(n-i-1\right)=\left(n-1\right)\left(n-2\right)-\sum_{i=1}^{n-2}i=\left(n-1\right)\left(n-2\right)-\frac{\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{2}=\frac{\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{2}$$

Il vient donc :

$$\sum_{\substack{1\le i<j\le n\\ j>i+1}} E\left(Y_iY_j\right)=\sum_{\substack{1\le i<j\le n\\ j>i+1}} E\left(X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}\right)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}p^4$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
2\times\sum_{1\le i<j\le n} E\left(Y_iY_j\right) &= 2\times\sum_{i=1}^{n-1} E\left(Y_iY_{i+1}\right)+2\times\sum_{\substack{1\le i<j\le n\\ j>i+1}} E\left(Y_iY_j\right)\\
&= 2\times\sum_{i=1}^{n-1} E\left(X_iX_{i+1}^2X_{i+2}\right)+2\times\sum_{\substack{1\le i<j\le n\\ j>i+1}} E\left(X_iX_{i+1}X_jX_{j+1}\right)\\
&= 2(n-1)p^3+2\times\frac{(n-1)(n-2)}{2}p^4\\
&= 2(n-1)p^3+(n-1)(n-2)p^4
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
E\left(V_n^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} E\left(Y_i^2\right)+2\sum_{1\le i<j\le n} E\left(Y_iY_j\right)\\
&= np^2+2(n-1)p^3+(n-1)(n-2)p^4
\end{aligned}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned}
V\left(V_n\right) &= E\left(V_n^2\right)-\left(E\left(V_n\right)\right)^2\\
&= np^2+2(n-1)p^3+(n-1)(n-2)p^4-\left(np^2\right)^2\\
&= np^2+2(n-1)p^3+(n-1)(n-2)p^4-n^2p^4\\
&= (-3n+2)p^4+2(n-1)p^3+np^2\\
&= p^2\left[(-3n+2)p^2+2(n-1)p+n\right]\\
&= p^2(1-p)\left[(3n-2)p+n\right]
\end{aligned}$$

On effectuer la factorisation en remarquant que 1 est racine évidente du trinôme $(-3n+2)p^2+2(n-1)p+n$ ou en procédant classiquement à l'aide du discriminant (réduit).

$$\boxed{E\left(V_n\right)=np^2 \text{ et } V\left(V_n\right)=p^2(1-p)\left[(3n-2)p+n\right].}$$

Question 2.

Pour tout entier naturel non nul n, on a : $\operatorname{cov}\left(S_n,V_n\right)=E\left(S_nV_n\right)-E\left(S_n\right)E\left(V_n\right)$.

Il nous faut donc calculer $E\left(S_nV_n\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
S_nV_n &= \left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)\left(Y_1+Y_2+\ldots+Y_n\right)\\
&= \left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)\left(X_1X_2+X_2X_3+\ldots+X_nX_{n+1}\right)\\
&= X_1^2X_2+\underbrace{X_1X_2X_3+\ldots+X_1X_nX_{n+1}}_{n-1\text{ termes}}\\
&\quad +X_1X_2^2+X_2^2X_3+\underbrace{X_2X_3X_4\ldots+X_2X_nX_{n+1}}_{n-2\text{ termes}}\\
&\quad +\ldots\\
&\quad +\underbrace{X_nX_1X_2+X_nX_2X_3+\ldots X_nX_{n-2}X_{n-1}}_{n-2\text{ termes}}+X_{n-1}X_n^2+X_n^2X_{n+1}
\end{aligned}$$

Dans cette somme comportant au total n^2 termes, il y a $n-1+(n-1)\times(n-2)=(n-1)^2$ termes de la forme $X_iX_jX_k$ où tous les indices sont différents et $1+2\times(n-1)=2n-1$ termes de la forme $X_i^2X_j$ avec $i\neq j$.

Traitons séparément ces deux situations.

Pour la variable aléatoire $X_iX_jX_k$, on a :

$$X_iX_jX_k=1\Leftrightarrow\left(X_i=1\right)\text{ et }\left(X_j=1\right)\text{ et }\left(X_k=1\right)$$

D'où, en tenant compte de l'indépendance des variables aléatoires X_n :

$$\begin{aligned}
P\left(X_iX_jX_k=1\right) &= P\left(\left(X_i=1\right)\cap\left(X_j=1\right)\cap\left(X_k=1\right)\right)\\
&= P\left(X_i=1\right)\times P\left(X_j=1\right)\times P\left(X_k=1\right)\\
&= p\times p\times p\\
&= p^3
\end{aligned}$$

Donc : $E\left(X_iX_jX_k\right)=p^3$.

Pour la variable aléatoire $X_i^2X_j$, on a :

$$X_i^2X_j=1\Leftrightarrow\left(X_i=1\right)\text{ et }\left(X_j=1\right)$$

D'où, en tenant compte de l'indépendance des variables aléatoires X_n :

$$\begin{aligned}
P\left(X_i^2X_j=1\right) &= P\left(\left(X_i=1\right)\cap\left(X_j=1\right)\right)\\
&= P\left(X_i=1\right)\times P\left(X_j=1\right)\\
&= p\times p\\
&= p^2
\end{aligned}$$

Donc : $E\left(X_i^2 X_j\right) = p^2$.

La linéarité de l'espérance nous donne alors :

$$E\left(S_n V_n\right) = \left(n-1\right)^2 p^3 + \left(2n-1\right) p^2$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(S_n, V_n\right) &= E\left(S_n V_n\right) - E\left(S_n\right) E\left(V_n\right) \\ &= \left(n-1\right)^2 p^3 + \left(2n-1\right) p^2 - np \times np^2 \\ &= \left[\left(n-1\right)^2 - n^2\right] p^3 + \left(2n-1\right) p^2 \\ &= -\left(2n-1\right) p^3 + \left(2n-1\right) p^2 \\ &= \left(2n-1\right)\left(1-p\right) p^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{cov}\left(S_n, V_n\right) = \left(2n-1\right)\left(1-p\right) p^2}$$