

Soit Y une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli de paramètre p .

1. Soit n un entier naturel non nul. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y^n ?
2. Soit n et m deux entiers naturels non nuls. Calculer $\text{cov}(Y^n, Y^m)$.
3. Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On pose $Z = Q(Y)$.
Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Z ? Calculer son espérance et sa variance.

Analyse

Les deux premières questions préparent la troisième. Pour autant, on peut aussi traiter la troisième question sans nécessairement utiliser les propriétés fondamentales de l'espérance et de la variance mais en revenant à leurs définitions.

Résolution

Question 1.

On a immédiatement, pour tout entier naturel n non nul : $Y = 0 \Leftrightarrow Y^n = 0$ et $Y = 1 \Leftrightarrow Y^n = 1$.

Ainsi : $P(Y^n = 1) = P(Y = 1) = p$ et $P(Y^n = 0) = P(Y = 0) = 1 - p$.

Finalement :

Pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire réelle Y^n suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Question 2.

Soit n et m deux entiers naturels non nuls.

On a classiquement : $\text{cov}(Y^n, Y^m) = E(Y^n \cdot Y^m) - E(Y^n)E(Y^m)$.

D'après la question précédente : $E(Y^n) = E(Y^m) = p$.

On montre facilement que la variable aléatoire $Y^n \cdot Y^m$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p et donc que l'on a encore : $E(Y^n \cdot Y^m) = p$.

On déduit de ce qui précède : $\text{cov}(Y^n, Y^m) = p - p \times p = p \times (1 - p) = V(Y)$

Pour tous entiers naturels non nuls n et m , on a :

$$\text{cov}(Y^n, Y^m) = p \times (1 - p) = V(Y)$$

Question 3.

Posons $Q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Par linéarité de l'espérance, il vient :

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(Q(Y)) \\ &= E(a_0 + a_1Y + a_2Y^2 + \dots + a_nY^n) \\ &= E\left(\sum_{k=0}^n a_k Y^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k E(Y^k) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k E(Y^k) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n p a_k \\ &= a_0 + p \sum_{k=1}^n a_k \\ &= a_0 + p \left(\sum_{k=0}^n a_k - a_0\right) \end{aligned}$$

En notant que $\sum_{k=0}^n a_k = Q(1)$ et $a_0 = Q(0)$, il vient finalement :

$$E(Z) = a_0 + p \left(\sum_{k=0}^n a_k - a_0\right) = Q(0) + p(Q(1) - Q(0)) = p \times Q(1) + (1 - p) \times Q(0)$$

On aurait bien sûr pu procéder directement en remarquant que la variable aléatoire $Z = Q(Y)$ ne prend que deux valeurs, $Q(1)$ et $Q(0)$, de probabilités respectives p et $1 - p$.

Pour la variance, on a :

$$\begin{aligned}
 V(Z) &= V(Q(Y)) \\
 &= V(a_0 + a_1Y + a_2Y^2 + \dots + a_nY^n) \\
 &= V\left(\sum_{k=0}^n a_k Y^k\right) \\
 &= V\left(\sum_{k=1}^n a_k Y^k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 V(Y^k) + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_k a_l \operatorname{cov}(Y^k, Y^l) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 p(1-p) + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_k a_l p(1-p) \\
 &= p(1-p) \times \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_k a_l \right) \\
 &= p(1-p) \times \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \\
 &= p(1-p) \times \left(\sum_{k=0}^n a_k - a_0 \right)^2 \\
 &= p(1-p) \times (Q(1) - Q(0))^2
 \end{aligned}$$

Ici encore, on peut procéder directement en utilisant la loi de probabilité de la variable aléatoire Z :

$$\begin{aligned}
 V(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 \\
 &= p \times Q(1)^2 + (1-p) \times Q(0)^2 - (p \times Q(1) + (1-p) \times Q(0))^2 \\
 &= p \times Q(1)^2 + (1-p) \times Q(0)^2 - p^2 \times Q(1)^2 - 2p(1-p) \times Q(1)Q(0) - (1-p)^2 \times Q(0)^2 \\
 &= (p - p^2) \times Q(1)^2 + ((1-p) - (1-p)^2) \times Q(0)^2 - 2p(1-p) \times Q(1)Q(0) \\
 &= p(1-p) \times Q(1)^2 + p(1-p) \times Q(0)^2 - 2p(1-p) \times Q(1)Q(0) \\
 &= p(1-p) \times (Q(1)^2 + Q(0)^2 - 2Q(1)Q(0)) \\
 &= p(1-p) \times (Q(1) - Q(0))^2
 \end{aligned}$$

$E(Z) = p \times Q(1) + (1-p) \times Q(0) \text{ et } V(Z) = p(1-p) \times (Q(1) - Q(0))^2$
