

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée n fois.

On note F_n la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de

FACE obtenu et on pose : $\hat{F}_n = \frac{F_n}{n}$.

1. Quelle est la loi suivie par F_n ?

Dans la suite de l'exercice, on suppose n pair.

2. Calculer $P\left(F_n = \frac{n}{2}\right)$. En donner un équivalent simple en $+\infty$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(F_n = \frac{n}{2}\right)$. Interpréter le résultat obtenu.

3. Calcul l'espérance et la variance de \hat{F}_n .

4. Pour tout $\varepsilon > 0$ montrer que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\hat{F}_n \in \left] \frac{1}{2} - \varepsilon ; \frac{1}{2} + \varepsilon \right[\right) = 1$.

Interpréter le résultat.

Analyse

Dans cet exercice, on s'intéresse à quelques aspects probabilistes du lancer d'une pièce de monnaie bien équilibrée, cette expérience étant répétée.

Dans la question 2, on montre que dans une telle expérience, si on lance la pièce un grand nombre de fois, il y aura une probabilité infime d'obtenir autant de fois FACE que PILE. On doit se convaincre de la « singularité » de cet événement.

La question 4, en revanche, illustre de façon pratique le concept de probabilité que l'on peut (doit ?) voir comme une fréquence idéale : lorsqu'on lance un grand nombre de fois la pièce, la proportion (fréquence) de FACE obtenue est proche de $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire de la probabilité de cette issue dans l'expérience de Bernoulli.

Résolution

Question 1.

Chaque lancer de la pièce peut-être modélisé par une expérience de Bernoulli, le succès (obtenir FACE) ayant à chaque fois la probabilité $\frac{1}{2}$ (la pièce est bien équilibrée).

Cette même expérience de Bernoulli est répétée n fois. Comme les lancers sont indépendants les uns des autres, on peut finalement conclure que la variable aléatoire F_n comptabilisant le nombre de FACE obtenus suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

$$F_n \text{ suit la loi } \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$$

Question 2.

D'après la question précédente, il vient :

$$P\left(F_n = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n - \frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)! \times \left(n - \frac{n}{2}\right)!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n!}{2^n \times \left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2}$$

$$P\left(F_n = \frac{n}{2}\right) = \frac{n!}{2^n \times \left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2}$$

On a un équivalent simple de $n!$ via la formule de STIRLING :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{2}\right)! &\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi \frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}} \\ \left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2 &\underset{+\infty}{\sim} \left(\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = \pi n \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \frac{n!}{2^n \times \left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{2^n \times \pi n \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \frac{1}{2^n}} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\pi n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{P}\left(F_n = \frac{n}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on déduit immédiatement du résultat précédent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{P}\left(F_n = \frac{n}{2}\right) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{P}\left(F_n = \frac{n}{2}\right) = 0$$

Ce résultat est plutôt intuitif : lorsque l'on lance une pièce de monnaie un grand nombre de fois, l'événement « On obtient autant de FACE que de PILE » (c'est-à-dire $\left(F_n = \frac{n}{2}\right)$) se réalisera de plus en plus rarement. A la limite, l'événement ne sera presque sûrement pas réalisé.

Question 3.

Comme $\hat{F}_n = \frac{F_n}{n}$, il vient : $\text{E}\left(\hat{F}_n\right) = \text{E}\left(\frac{F_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \text{E}(F_n)$ et $\text{V}\left(\hat{F}_n\right) = \text{V}\left(\frac{F_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \times \text{V}(F_n)$.

La variable aléatoire F_n suivant la loi $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$, on a : $\text{E}(F_n) = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ et

$$\text{V}(F_n) = n \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}.$$

D'où : $\text{E}\left(\hat{F}_n\right) = \frac{1}{n} \times \text{E}(F_n) = \frac{1}{n} \times \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$ et $\text{V}\left(\hat{F}_n\right) = \frac{1}{n^2} \times \text{V}(F_n) = \frac{1}{n^2} \times \frac{n}{4} = \frac{1}{4n}$.

$$\text{E}\left(\hat{F}_n\right) = \frac{1}{2} \text{ et } \text{V}\left(\hat{F}_n\right) = \frac{1}{4n}$$

Question 4.

Soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$\text{P}\left(\hat{F}_n \in \left[\frac{1}{2} - \varepsilon; \frac{1}{2} + \varepsilon\right]\right) = \text{P}\left(\left|\hat{F}_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right) = 1 - \text{P}\left(\left|\hat{F}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - \text{P}\left(\left|\hat{F}_n - \text{E}\left(\hat{F}_n\right)\right| \geq \varepsilon\right)$$

L'inégalité de BIENAYME-TCHEBICHEV s'écrit ici :

$$P\left(\left|\hat{F}_n - E(\hat{F}_n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(\hat{F}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{4n}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$$

On en tire : $1 - P\left(\left|\hat{F}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$ et ainsi : $1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n} \leq P\left(\hat{F}_n \in \left]\frac{1}{2} - \varepsilon; \frac{1}{2} + \varepsilon\right]\right) \leq 1$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n}\right) = 1$, il vient finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\hat{F}_n \in \left]\frac{1}{2} - \varepsilon; \frac{1}{2} + \varepsilon\right]\right) = 1$.

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\hat{F}_n \in \left]\frac{1}{2} - \varepsilon; \frac{1}{2} + \varepsilon\right]\right) = 1$$

La variable aléatoire \hat{F}_n mesure, pour les n lancers effectués, la proportion de FACE obtenue.

D'après le résultat précédent, on peut considérer un intervalle centré en $\frac{1}{2}$ aussi petit que l'on veut, la proportion \hat{F}_n se trouvera presque sûrement dans cet intervalle pour peu qu'on lance la pièce un nombre de fois suffisamment grand.