Soit P un polynôme.
Le reste de la division de P par $P_1(x)=x-1$ vaut 6.
Le reste de la division de P par $P_2(x)=x-2$ vaut 9.
Le reste de la division de P' par $P_1(x)=x-1$ vaut 2.
Déterminer le reste de la division de P par le polynôme $S(x)=x^3-4x^2+5x-2$.

Analyse

Il convient, dans un premier temps d'étudier la factorisation du polynôme S puis d'exprimer et d'exploiter les hypothèses fournies.

Résolution

Constatant rapidement que $x_0=1$ est racine de S, on a :

$$\begin{aligned} S(x) &= (x-1)\left(x^2-3x+2\right) \\ &= (x-1)(x-1)(x-2) \\ &= (x-1)^2(x-2) \end{aligned}$$

La division de P par le polynôme S de degré 3 s'écrit alors :

$$P(x)=S(x)Q(x)+R(x) \text{ où } \mathrm{d}°(R)\leq 2$$

Soit :

$$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c \quad (1)$$

Traduisons maintenant les hypothèses fournies :

Pour écrire le résultat de la division de P par P_1, il suffit, d'après (1), d'effectuer la division de R par P_1. On a :

$$ax^2+bx+c=(x-1)\big(ax+(a+b)\big)+a+b+c$$

On peut alors récrire (1) comme suit :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2(x-2)Q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x-1)^2(x-2)Q(x) + (x-1)\big(ax + (a+b)\big) + a + b + c \\ &= (x-1)\Big[(x-1)(x-2)Q(x) + \big(ax + (a+b)\big)\Big] + a + b + c \end{aligned}$$

On en déduit que le reste de la division de P par P_1 vaut $a+b+c$. Or, par hypothèse, ce reste vaut 6. On a donc :

$$a+b+c=6$$

On procède de façon analogue avec P_2 :

$$ax^2 + bx + c = (x-2)\big(ax + (2a+b)\big) + 4a + 2b + c$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2(x-2)Q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x-1)^2(x-2)Q(x) + (x-2)\big(ax + (2a+b)\big) + 4a + 2b + c \\ &= (x-2)\Big[(x-1)^2 Q(x) + \big(ax + (2a+b)\big)\Big] + 4a + 2b + c \end{aligned}$$

D’où :

$$4a+2b+c=9$$

Exprimons maintenant la dérivée de *P* en utilisant (1) :

$$P'(x) = (x-1)\Big[2(x-2)Q(x) + (x-1)Q(x) + (x-1)^2(x-2)Q'(x)\Big] + 2ax + b$$

Pour déterminer le reste de la division de P' par P_1, il suffit donc de diviser $2ax+b$ par P_1 :

On a simplement : $2ax + b = 2a(x-1) + 2a + b$ et donc :

$$P'(x) = (x-1)\Big[2(x-2)Q(x) + (x-1)Q(x) + (x-1)^2(x-2)Q'(x) + 2a\Big] + 2a + b$$

D’après l’hypothèse, on en déduit :

$$2a+b=2$$

Il convient donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ 2a + b + = 2 \end{cases}$$

La dernière ligne nous donne : $b = 2 - 2a$ et les deux premières lignes se récrivent :

$$\begin{cases} -a + c = 4 \\ c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 5 \end{cases}$$

Il vient alors $b = 0$.

Finalement la division de P par S s'écrit :

$$P(x) = (x-1)^2 (x-2) Q(x) + x^2 + 5$$

Résultat final

Le reste de la division du polynôme P par le polynôme $S(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ est le polynôme : $R(x) = x^2 + 5$.