Déterminez les racines du polynôme :

$$P_n(x)=1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}$$

Analyse

On note d'abord, en examinant le dernier terme de $P_n(x)$ qui comporte *n* monômes en facteur, que le degré de P_n vaut *n*. P_n admet donc au plus *n* racines. On peut ensuite remarquer que des valeurs simples de *x* annulent $P_n(x)$.

Résolution

On constate rapidement que l'on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, P_n(1)=0$.

En continuant, il vient : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}, P_n(2)=1-2+\frac{2\times 1}{2}=0$.

Puis : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1,2\}, P_n(3)=1-3+\frac{3\times 2}{2}-\frac{3\times 2\times 1}{6}=0$

Ces « essais » semblent indiquer que les racines de P_n sont les *n* premiers entiers : 1, 2, …, *n*.

Nous allons le montrer par récurrence.

Soit donc la propriété : « Les racines du polynôme P_n sont les entiers 1, 2, …, *n* » (E_n)

Nous avons vu ci-dessus, que (E_1), (E_2) et (E_3) étaient vraies.

Supposons donc maintenant la propriété (E_n) vraie et étudions (E_{n+1}).

Nous considérons d'abord P_{n+1} qui s'écrit :

$$\begin{aligned}P_{n+1}(x)&=1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\ldots\\&\quad+(-1)^n\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}+(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)(x-n)}{(n+1)!}\end{aligned}$$

On a donc, plus simplement :

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}(x) &= P_n(x) + (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)(x-n)}{(n+1)!} \\
&= P_n(x) + Q_{n+1}(x)
\end{aligned}
$$

Avec : $Q_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)(x-n)}{(n+1)!}$

On constate aisément que : $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, Q_{n+1}(k) = 0$.
De surcroît, par hypothèse on a : $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, P_n(k) = 0$.
Il vient donc : $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, P_n(x) + Q_{n+1}(k) = 0 = P_{n+1}(k)$.

Nous avons ainsi établi que les *n* premiers entiers étaient racines de P_{n+1}.

Calculons maintenant $P_{n+1}(n+1)$.

En revenant à la définition de P_{n+1}, il vient :

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}(n+1) &= 1 - \frac{n+1}{1!} + \frac{(n+1)n}{2!} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + \ldots \\
&\quad + (-1)^n \frac{(n+1)n(n-1)\ldots 2}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n(n-1)\ldots 2.1}{(n+1)!} \\
&= 1 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 - C_{n+1}^3 + \ldots + (-1)^n C_{n+1}^n + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} \\
&= (1-1)^{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$n+1$ annule P_{n+1}, la propriété (E_{n+1}) est donc vraie. On en déduit que (E_n) est vraie pour tout entier *n* non nul.

Résultat final

Les racines de :

$$
P_n(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}
$$

sont les *n* entiers : 1, 2, …, *n*.