Factoriser dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$:

$$P(X)=5X^4+X^3+4X^2+X+5$$

Analyse

On remarque la symétrie des coefficients : le polynôme P est un polynôme réciproque …

Résolution

Le polynôme P est un polynôme réciproque mais on constate rapidement que ni 1 ni -1 n'en sont racines.

On a alors, P étant de degré 4 :

$$\frac{P(X)}{X^2}=5X^2+X+4+\frac{1}{X}+\frac{5}{X^2}=5\left(X^2+\frac{1}{X^2}\right)+X+\frac{1}{X}+4$$

On pose classiquement : $Y=X+\frac{1}{X}$. On a alors : $Y^2=X^2+\frac{1}{X^2}+2$.

D'où :

$$\frac{P(X)}{X^2}=5\left(Y^2-2\right)+Y+4=5Y^2+Y-6$$

On doit ainsi résoudre : $5Y^2+Y-6=0$.

1 est racine évidente du polynôme $5Y^2+Y-6$ et on a :

$$5Y^2+Y-6=(Y-1)(5Y+6)$$

Il nous faut maintenant résoudre les deux équations :

$$X+\frac{1}{X}=1 \text{ et } X+\frac{1}{X}=-\frac{6}{5}$$

Soit :

$$X^2-X+1=0 \text{ et } 5X^2+6X+5=0$$

On constate rapidement que ces deux polynômes du second degré n'admettent pas de racines réelles. On en déduit finalement la décomposition du polynôme P sur $\mathbb{R}$:

$$P(X)=\left(X^2-X+1\right)\left(5X^2+6X+5\right)$$

Les racines complexes des polynômes $X^2 - X + 1$ et $5X^2 + 6X + 5$ s'obtiennent en résolvant les équations du second degré correspondantes et on obtient :

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-3+4i}{5}\ \text{ et }\ \frac{-3-4i}{5}$$

On en tire la factorisation de P sur $\mathbb{C}$:

$$P(X) = 5\left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-3+4i}{5}\right)\left(X - \frac{-3-4i}{5}\right)$$

Résultat final

$$\begin{aligned}
P(X) &= 5X^4 + X^3 + 4X^2 + X + 5 \\
&= \left(X^2 - X + 1\right)\left(5X^2 + 6X + 5\right) \\
&= 5\left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-3+4i}{5}\right)\left(X - \frac{-3-4i}{5}\right)
\end{aligned}$$