Soit le polynôme :

$$P(X) = X^3 + X + 1$$

On note α, β et γ ses trois racines (dans $\mathbb{C}$).

Donner un polynôme dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont $\dfrac{1}{\alpha+1}$, $\dfrac{1}{\beta+1}$ et $\dfrac{1}{\gamma+1}$.

Analyse

Dans cet exercice, il convient d'utiliser les relations existant entre les coefficients d'un polynômes et ses racines. On posera ainsi classiquement : $\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $\sigma_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, etc.

Rappelons que pour un polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$ ($a_n \neq 0$) on a :

$$\sigma_k = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} r_{i_1} r_{i_2} \ldots r_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Les r_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) désignant les n racines du polynôme dans $\mathbb{C}$.

Résolution

Le coefficient de X^2 de P étant nul, on a : $\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = 0$.

Le coefficient de X de P étant égal à 1, on a : $\sigma_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$.

Enfin, le coefficient constant de P étant égal à 1, on a : $\sigma_3 = \alpha\beta\gamma = -1$.

Il convient maintenant de calculer les sommes équivalentes pour les nombres $\dfrac{1}{\alpha+1}$, $\dfrac{1}{\beta+1}$ et $\dfrac{1}{\gamma+1}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} = \frac{(\beta+1)(\gamma+1) + (\alpha+1)(\gamma+1) + (\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)} \\
&= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 2(\alpha+\beta+\gamma) + 3}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma + 1} = \frac{\sigma_2 + 2\sigma_1 + 3}{\sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_1 + 1} = \frac{1 + 2\times 0 + 3}{-1 + 1 + 0 + 1} \\
&= \boxed{4}
\end{aligned}$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{\gamma+1}+\frac{1}{\gamma+1}\cdot\frac{1}{\alpha+1}=\frac{\gamma+1+\alpha+1+\beta+1}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}$$
$$=\frac{\sigma_1+3}{\sigma_3+\sigma_2+\sigma_1+1}=\frac{0+3}{1}$$
$$=\boxed{3}$$

$$\Sigma_3 = \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{\gamma+1}=\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

En notant Q le polynôme cherché et en le choisissant unitaire, il vient alors :

$$Q(X)=X^3-4X^2+3X-1$$

Résultat final

$$Q(X)=X^3-4X^2+3X-1$$