Résoudre :

$$2x^5 - x^4 - 12x^3 + 12x^2 + x - 2 = 0$$

Analyse

On constate, au regard des coefficients de l'équation proposée, que le polynôme correspondant *P*, défini par : $P(X) = 2X^5 - X^4 - 12X^3 + 12X^2 + X - 2$ est un polynôme réciproque. Dans un premier temps, on cherche à savoir si 1 ou -1 sont racines de l'équation.

Résolution

On a aisément $P(1) = 0$.

On peut donc écrire *P* sous la forme : $P(X) = (X-1)Q(X)$ où *Q* est également un polynôme réciproque (voir cours).

Plus précisément, les coefficients extrêmes de *Q* étant faciles à déterminer, on a :

$$P(X) = (X-1)\left(2X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 2\right)$$

En procédant, par exemple, par identification, on obtient alors :

$$P(X) = (X-1)\left(2X^4 + X^3 - 11X^2 + X + 2\right)$$

Ni 1, ni -1 ne sont racines du polynôme *Q*.
On écrit alors classiquement :

$$\frac{Q(X)}{X^2} = \frac{2X^4 + X^3 - 11X^2 + X + 2}{X^2} = 2X^2 + X - 11 + \frac{1}{X} + \frac{2}{X^2}$$

On introduit : $Y = X + \frac{1}{X}$. Il vient alors : $Y^2 - 2 = X^2 + \frac{1}{X^2}$ et :

$$\frac{Q(X)}{X^2} = 2\left(Y^2 - 2\right) + Y - 11 = 2Y^2 + Y - 15$$

On obtient alors facilement : $2Y^2 + Y - 15 = (Y+3)(2Y-5)$.

D'où :

$$\frac{Q(X)}{X^2}=(Y+3)(2Y-5)=\left(X+\frac{1}{X}+3\right)\left(2X+\frac{2}{X}-5\right)=\frac{\left(X^2+3X+1\right)\left(2X^2-5X+2\right)}{X^2}$$

On peut alors aisément factoriser les polynômes X^2+3X+1 et $2X^2-5X+2$:

$$X^2+3X+1=\left(X+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \text{ et } 2X^2-5X+2=(X-2)(2X-1)$$

Finalement, le polynôme P se factorise sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$P(X)=(X-1)\left(X+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(X-2)(2X-1)$$

Les solutions de l'équation $2x^5-x^4-12x^3+12x^2+x-2$ sont les cinq réels suivants (classés dans l'ordre croissant) : $-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1 et 2.

Résultat final

Les solutions de l'équation $2x^5-x^4-12x^3+12x^2+x-2$ sont les cinq réels :

$$-\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ -\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2},\ 1 \text{ et } 2$$