On considère l'équation :

$$x^8 - 3x - 1 = 0$$

On note α_i ses huit racines complexes.

Calculer la somme : $S = \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{\alpha_i + 2}$.

Analyse

A chaque α_i on associe $\beta_i = \frac{1}{\alpha_i + 2}$ (on justifiera cette possibilité). Il convient alors de chercher une équation dont les racines sont les β_i … Mais puisque seule leur somme nous intéresse, ce n'est pas toute l'équation que nous recherchons …

Résolution

-2 n'est pas racine de l'équation initiale (on a : $(-2)^3 - 3\times(-2) - 1 \neq 0$). On peut donc s'intéresser à l'application *f* définie par :

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}^* \\ &x \mapsto f(x) = y = \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$

y ne s'annulant pas, on en tire facilement : $x = \frac{1}{y} - 2$.

L'équation initiale se récrit alors :

$$\left(\frac{1}{y} - 2\right)^8 - 3\left(\frac{1}{y} - 2\right) - 1 = 0$$

D'où, en multipliant par y^8 : $(1-2y)^8 - 3y^7(1-2y) - y^8 = 0$.

Les β_i sont ainsi les 8 solutions de cette équation de degré 8. Pour en déterminer la somme, nous avons besoin de deux coefficients : celui de y^7 et celui de y^8.

Le coefficient de y^8 vaut : $(-2)^8 - 3\times(-2) - 1 = 256 + 6 - 1 = 261$.

Le coefficient de y^7 vaut : $8\times(-2)^7 - 3 = -1024 - 3 = -1027$.

Le degré de l'équation étant pair, on en tire que la somme des racines est égale à :

$$-\frac{-1027}{261} = \frac{1027}{261}$$

Finalement :

$$S = \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{\alpha_i + 2} = \frac{1027}{261}$$

Résultat final

Si on note α_i les huit solutions complexes de l'équation $x^8 - 3x - 1 = 0$ alors on a :

$$S = \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{\alpha_i + 2} = \frac{1027}{261}$$