

On considère l'équation sur \mathbb{C} :

$$x^3 + px + q = 0$$

On note a , b et c ses racines.

Déterminer une équation de degré 3 admettant comme racines :

- a^2 , b^2 et c^2 .
- a^3 , b^3 et c^3 .

Analyse

Nous proposons ici deux méthodes de résolution : la première vise à obtenir les coefficients des équations cherchées en tant que sommes des racines ; La seconde consiste, plus simplement, à effectuer un changement de variable. Les longueurs des résolutions vous permettront de les comparer ...

Résolution

1^{ère} méthode :

Nous commençons par chercher une équation de degré 3 admettant comme racines a^2 , b^2 et c^2 .

Une telle équation est de la forme : $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

On a alors, l'équation étant de degré impair et le coefficient de x^3 étant égal à 1 :

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 &= -\alpha \\ a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 &= \beta \\ a^2b^2c^2 &= -\gamma\end{aligned}$$

Par ailleurs, a , b et c étant solutions de $x^3 + px + q = 0$, on a :

$$\begin{aligned}a + b + c &= 0 \\ ab + bc + ac &= p \\ abc &= -q\end{aligned}$$

On a alors :

$$\gamma = -a^2b^2c^2 = -(abc)^2 = -(-q)^2 = -q^2$$

Puis :

$$\begin{aligned}\beta &= a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \\ &= (ab + bc + ac)^2 - 2(a^2bc + ab^2c + abc^2) \\ &= (ab + bc + ac)^2 - 2abc \underbrace{(a + b + c)}_{=0} \\ &= (ab + bc + ac)^2 \\ &= p^2\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\alpha &= -(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= -\left[(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)\right] \\ &= -\underbrace{(a + b + c)^2}_{=0} + 2(ab + bc + ac) \\ &= 2(ab + bc + ac) \\ &= 2p\end{aligned}$$

L'équation cherchée s'écrit donc :

$$\boxed{x^3 + 2px^2 + p^2x - q^2 = 0}$$

On procède de façon analogue pour la seconde équation que nous cherchons encore sous la forme :

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

Mais on a cette fois :

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 &= -\alpha \\ a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3 &= \beta \\ a^3b^3c^3 &= -\gamma\end{aligned}$$

On a alors :

$$\gamma = -a^3b^3c^3 = -(abc)^3 = -(-q)^3 = q^3$$

Puis :

$$\begin{aligned}\beta &= a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3 \\ &= (ab + ac + bc)^3 - 3(ab^2c^3 + ab^3c^2 + a^2bc^3 + a^3bc^2 + a^2b^3c + a^3b^2c) - 6a^2b^2c^2 \\ &= (ab + ac + bc)^3 - 3abc(ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + bc^2 + b^2c) - 6(abc)^2 \\ &= (ab + ac + bc)^3 - 3abc[ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)] - 6(abc)^2 \\ &= (ab + ac + bc)^3 - 3abc[ab(a+b+c) - abc + ac(a+b+c) - abc + bc(a+b+c) - abc] - 6(abc)^2 \\ &= (ab + ac + bc)^3 - 3abc[(a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc] - 6(abc)^2 \\ &= (ab + ac + bc)^3 - 3abc(a+b+c)(ab+ac+bc) + 9(abc)^2 - 6(abc)^2 \\ &= (ab + ac + bc)^3 - 3abc \underbrace{(a+b+c)}_{=0} (ab+ac+bc) + 3(abc)^2 \\ &= p^3 + 3(-q)^2 \\ &= p^3 + 3q^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= -(a^3 + b^3 + c^3) \\ &= -\left[(a+b+c)^3 - 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) - 6abc\right] \\ &= -(a+b+c)^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc \\ &= -(a+b+c)^3 + 3ab(a+b+c) - 3abc + 3ac(a+b+c) - 3abc + 3bc(a+b+c) - 3abc + 6abc \\ &= -\underbrace{(a+b+c)^3}_{=0} + 3\underbrace{(a+b+c)}_{=0}(ab+ac+bc) - 3abc \\ &= -3abc \\ &= -3(-q) \\ &= 3q\end{aligned}$$

L'équation cherchée s'écrit donc :

$$\boxed{x^3 + 3qx^2 + (p^3 + 3q^2)x + q^3 = 0}$$

2^{ème} méthode :

On effectue le changement de variable : $y = x^2$.

On a alors :

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + p) + q = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y + p) + q = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y + p) = -q \\ y = x^2 \end{cases}$$

En élevant la première égalité au carré, on tire : $x^2(y+p)^2 = q^2$, soit : $y(y+p)^2 = q^2$.

En développant et en réordonnant on obtient finalement :

$$y^3 + 2py^2 + p^2y - q^2 = 0.$$

On a ainsi établi que si a , b et c sont solutions de $x^3 + px + q = 0$, alors a^2 , b^2 et c^2 sont solutions de $y^3 + 2py^2 + p^2y - q^2 = 0$. Or, cette équation étant de degré 3 elle n'admet pas d'autres solutions. C'est donc bien l'équation cherchée.

On a ainsi retrouvé l'équation obtenue grâce à la première méthode.

De façon similaire, pour la deuxième équation on a :

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + px + q = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -px = y + q \\ y = x^3 \end{cases}$$

En élevant la première égalité au cube, il vient : $(-px)^3 = (y+q)^3$.

Soit : $-p^3x^3 = y^3 + 3qy^2 + 3q^2y + q^3$.

Finalement, en tenant compte de $y = x^3$ et en réordonnant, on obtient :

$$y^3 + 3qy^2 + (3q^2 + p^3)y + q^3 = 0$$

Ici encore, on a obtenu l'équation issue de la première méthode.

Résultat final

Si on note a , b et c les racines (complexes) de l'équation $x^3 + px + q = 0$ alors :

- a^2 , b^2 et c^2 seront les solutions de l'équation : $x^3 + 2px^2 + p^2x - q^2 = 0$;
- a^3 , b^3 et c^3 seront les solutions de l'équation : $x^3 + 3qx^2 + (p^3 + 3q^2)x + q^3 = 0$.