Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ : $(z^2+3z+1)^2+3z^2+8z+4=0$.

## Analyse

Un exercice intéressant où un premier résultat, à priori pas complètement évident (si ?), est ensuite appliqué. Le premier résultat fait appel à une petite « astuce » …

## Résolution

1. On peut écrire : $P \circ P - X = (P \circ P - P) + (P - X)$. Ainsi, il suffit de montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.

   Si $P$ est un polynôme constant, $P \circ P - P$ est le polynôme nul et le résultat est immédiat.

   Si on suppose que $P$ est de degré $n \geq 1$ et que l'on pose : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, il vient :

$$\begin{aligned}
(P \circ P - P)(X) &= P(P(X)) - P(X) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k (P(X))^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[ (P(X))^k - X^k \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left[ (P(X))^k - X^k \right]
\end{aligned}$$

   Pour tout entier naturel $k$ compris entre 1 et $n$, on a :

$$(P(X))^k - X^k = (P(X) - X) Q_k(X)$$

   Où $Q_k$ est un polynôme de degré $kn - 1$.

Il vient alors :

$$(PoP-P)(X)=(P(X)-X)\sum_{k=1}^{n}a_kQ_k(X)$$

Le résultat est ainsi établi.

2. Utilisons la résultat de la question précédente. Pour cela, il convient d'écrire $(z^2+3z+1)^2+3z^2+8z+4$ sous la forme $(PoP)(z)-z$.

On a :

$$\begin{aligned}(z^2+3z+1)^2+3z^2+8z+4&=\left\{(z^2+3z+1)^2+3z^2+9z+4\right\}-z\\&=\left\{(z^2+3z+1)^2+3(z^2+3z+1)+1\right\}-z\\&=(PoP)(z)-z\end{aligned}$$

Avec : $P(z)=z^2+3z+1$.

On déduit de la question précédente que l'on peut factoriser $(z^2+3z+1)^2+3z^2+8z+4$ par $P(z)-z=z^2+3z+1-z=z^2+2z+1=(z+1)^2$. On a donc :

$$(z^2+3z+1)^2+3z^2+8z+4=(z^2+2z+1)(az^2+bz+c)$$

Le coefficient du terme de plus haut degré est simplement le coefficient de $z^4$ dans le développement de $(z^2+3z+1)^2$, c'est-à-dire 1 : $a=1$.
Le terme constant vaut 5 d'après le membre de gauche. Or, d'après le membre de droite, il vaut *c*. D'où : $c=5$.
Enfin, $(z^2+3z+1)^2$ va donner comme seule puissance cube de z : $6z^3$. D'après le membre de droite, le coefficient de $z^3$ vaut : $2a+b=2+b$. D'où : $b=4$.

On a donc :

$$(z^2+3z+1)^2+3z^2+8z+4=(z^2+2z+1)(z^2+4z+5)=(z+1)^2(z^2+4z+5)$$

On obtient facilement les racines de $z^2+4z+5$ : $-2-i$ et $-2+i$.

Les solutions de l'équation $(z^2+3z+1)^2+3z^2+8z+4=0$ sont :
$-1$ (racine double), $-2-i$ et $-2+i$