Déterminer le reste de la division euclidienne de $\left(X+\sqrt{3}\right)^{17}$ par X^2+1.

Analyse

On pose tranquillement la division euclidienne de $\left(X+\sqrt{3}\right)^{17}$ par X^2+1 et on s'interroge sur l'art et la manière de s'affranchir de la « contrainte » du quotient …

Résolution

La division euclidienne de $\left(X+\sqrt{3}\right)^{17}$ par X^2+1 s'écrit :

$$\left(X+\sqrt{3}\right)^{17}=Q(X)\times\left(X^2+1\right)+R(X)=Q(X)\times\left(X^2+1\right)+aX+b$$

Où a et b sont deux réels à déterminer puisque nous nous intéressons au reste R de cette division.

En choisissant $X=i$, on obtient alors : $\left(i+\sqrt{3}\right)^{17}=Q(i)\times\left(i^2+1\right)+ai+b=ai+b$.

On a classiquement :

$$\begin{aligned}\left(i+\sqrt{3}\right)^{17}&=\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\right]^{17}=2^{17}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{17}=2^{17}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{17}=2^{17}e^{i\frac{17\pi}{6}}\\&=2^{17}e^{i\frac{(18-1)\pi}{6}}=2^{17}e^{i3\pi}e^{-i\frac{\pi}{6}}=-2^{17}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)\\&=2^{16}\left(-\sqrt{3}+i\right)\end{aligned}$$

Alors :

$$\left(i+\sqrt{3}\right)^{17}=ai+b\Leftrightarrow 2^{16}\left(-\sqrt{3}+i\right)=ai+b\Leftrightarrow\begin{cases}a=2^{16}\\b=-\sqrt{3}\times 2^{16}\end{cases}$$

On a finalement :

$$R(X)=aX+b=2^{16}\left(X-\sqrt{3}\right)$$

Résultat final

Le reste de la division euclidienne de $\left(X+\sqrt{3}\right)^{17}$ par X^2+1 est le polynôme R défini par :

$$R(X)=2^{16}\left(X-\sqrt{3}\right)$$