

Soit P un polynôme de degré N ($N \geq 1$) et vérifiant :

$$\forall n \in \llbracket 0; N \rrbracket, P(n) = \frac{n}{n+1}$$

Calculer $P(N+1)$.

Analyse

Le salut par la factorisation ! (une fois encore ...) On peut ici l'obtenir de diverses façons qui, in fine, reviennent à construire un nouveau polynôme à partir de $\forall n \in \llbracket 0; N \rrbracket, P(n) = \frac{n}{n+1}$, ce polynôme pouvant être plus facilement factorisé que P .

Résolution

Pour $n = 0$, on a immédiatement : $P(0) = \frac{0}{1+0} = 0$.

0 étant racine de P , on peut écrire : $P(X) = XQ(X)$ où Q est un polynôme de degré $N-1$.

Pour tout n entier naturel dans $\llbracket 1; N \rrbracket$, on a alors : $P(n) = \frac{n}{n+1} = nQ(n)$.

On en déduit donc : $\forall n \in \llbracket 1; N \rrbracket, Q(n) = \frac{1}{n+1}$.

Soit : $\forall n \in \llbracket 1; N \rrbracket, (n+1)Q(n) - 1 = 0$.

Soit alors R le polynôme défini par : $R(X) = (X+1)Q(X) - 1$

Le polynôme Q étant de degré $N-1$, le polynôme R est de degré N .

Par ailleurs, d'après ce qui précède, R admet N racines : $1, 2, 3, \dots, N$.

On peut donc écrire :

$$R(X) = (X+1)Q(X) - 1 = a(X-1)(X-2)\dots(X-N) \quad (E)$$

Ainsi, le réel a n'est rien d'autre que le coefficient de X^{N-1} de Q , c'est-à-dire le coefficient de X^N de P .

Avec $X = N+1$, l'égalité (E) donne :

$$R(N+1) = (N+1+1)Q(N+1) - 1 = a(N+1-1)(N+1-2)\dots(N+1-N)$$

D'où : $(N+2)Q(N+1)-1 = a N!$

Finalement : $Q(N+1) = \frac{1+a N!}{N+2}$.

Avec $X = -1$, l'égalité (E) donne :

$$\begin{aligned}(-1+1)Q(-1)-1 &= 0 \\ &= a \underbrace{(-1-1)(-1-2)\dots(-1-N)}_{N \text{ facteurs}} \\ &= a(-1)^N (N+1)!\end{aligned}$$

D'où : $a = \frac{-1}{(-1)^N (N+1)!} = \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)!}$.

Il vient donc : $Q(N+1) = \frac{1+a N!}{N+2} = \frac{1 + \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)!} N!}{N+2} = \frac{1 + \frac{(-1)^{N+1}}{N+1}}{N+2} = \frac{N+1+(-1)^{N+1}}{(N+1)(N+2)}$.

Puis : $P(N+1) = (N+1)Q(N+1) = (N+1) \frac{N+1+(-1)^{N+1}}{(N+1)(N+2)} = \frac{N+1+(-1)^{N+1}}{N+2}$.

On peut distinguer deux situations :

- Si N est pair : $(-1)^{N+1} = -1$ et $P(N+1) = \frac{N+1-1}{N+2} = \frac{N}{N+2}$.
- Si N est impair : $(-1)^{N+1} = 1$ et $P(N+1) = \frac{N+1+1}{N+2} = \frac{N+2}{N+2} = 1$.

Résultat final

Si P est un polynôme de degré N ($N \geq 1$) qui vérifie $\forall n \in \llbracket 0; N \rrbracket, P(n) = \frac{n}{n+1}$

alors on a : $P(N+1) = \frac{N+1+(-1)^{N+1}}{N+2}$, soit :

$P(N+1) = \frac{N}{N+2}$ (N pair) ou $P(N+1) = 1$ (N impair).