Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{50} par X^2-3X+2.

Analyse

On pose tranquillement la division euclidienne de X^{50} par X^2-3X+2 et on s'interroge sur l'art et la manière de s'affranchir de la « contrainte » du quotient …

Résolution

La division euclidienne de X^{50} par X^2-3X+2 s'écrit ;

$$X^{50}=Q(X)\times\left(X^2-3X+2\right)+R(X)=Q(X)\times(X-1)(X-2)+aX+b$$

Où a et b sont deux réels à déterminer puisque nous nous intéressons au reste R de cette division.

En choisissant $X=1$, on obtient alors : $1^{50}=1=Q(1)\times(1-1)(1-2)+a\times1+b=a+b$.

En choisissant ensuite $X=2$, on obtient alors : $2^{50}=Q(2)\times(2-1)(2-2)+a\times2+b=2a+b$.

On a ainsi obtenu le système :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2^{50} \end{cases}$$

En soustrayant la première égalité à la seconde, il vient :

$$2a+b-(a+b)=2^{50}-1\Leftrightarrow a=2^{50}-1$$

Il vient ensuite : $b=1-a=a=1-\left(2^{50}-1\right)=2-2^{50}=2\left(1-2^{49}\right)$.

On a finalement :

$$R(X)=aX+b=\left(2^{50}-1\right)X+2\left(1-2^{49}\right)$$

Résultat final

Le reste de la division euclidienne de X^{50} par $X^2 - 3X + 2$ est le polynôme R défini par :

$$R(X) = \left(2^{50} - 1\right)X + 2\left(1 - 2^{49}\right)$$