Soit $n$ un entier naturel non nul et soit $P$ un polynôme tel que $P\left(X^n\right)$ soit divisible par $X-1$.

Montrer que $P\left(X^n\right)$ est divisible par $X^n-1$.

## Analyse

On pose tranquillement les divisions euclidiennes de P par $X^2+1$, $X^2-1$ et $X^4-1$. Le reste de la troisième peut alors être obtenue en choisissant des valeurs judicieuses pour l'indéterminée.

## Résolution

Posons :

$$P\left(X\right)=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_pX^p$$

et :

$$\begin{aligned}Q\left(X\right)=P\left(X^n\right)&=\sum_{k=0}^{p}a_k\left(X^n\right)^k=a_0+a_1X^n+a_2\left(X^n\right)^2+...+a_p\left(X^n\right)^p\\&=a_0+a_1X^n+a_2X^{2n}+...+a_pX^{pn}\end{aligned}$$

Supposer que $Q$ est divisible par $X-1$ équivaut à supposer que $Q\left(1\right)$ est égal à 0, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{p}a_k=0$.

Montrer que $X^n-1$ divise $Q$ équivaut à montrer que tout racine $n$-ième de l'unité est racine de $Q$.

Soit donc $x_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ une racine $n$-ième de l'unité ($k\in\left[\!\left[0\,;n-1\right]\!\right]$) : $x_k^n=1$.
On a immédiatement :

$$Q\left(x_k\right)=\sum_{j=0}^{p}a_k\underbrace{\left(x_k^n\right)}_{=1}{}^j=\sum_{j=0}^{p}a_k=0$$

On a bien le résultat cherché.

## Résultat final

Si $n$ est un entier naturel non nul

et si $P$ est un polynôme tel que $P\left(X^n\right)$ est divisible par $X-1$

alors $P\left(X^n\right)$ est aussi divisible par $X^n-1$.