

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $X^4 - 1$ divise $X^{4n} - 1$.

2. Soit a, b, c et d quatre entiers naturels.

Montrer que $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ divise

$$P(X) = X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}.$$

Analyse

Dans les deux questions, on a le choix de travailler en effectuant des factorisations ou en considérant les racines, respectivement de $X^4 - 1$ et $X^3 + X^2 + X + 1 \dots$

Résolution

Question 1.

Si $n = 0$, le résultat est immédiat.

Supposons $n \neq 0$. On a alors, en utilisant la factorisation classique

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) :$$

$$X^{4n} - 1 = (X^4)^n - 1^n = (X^4 - 1) \left((X^4)^{n-1} + (X^4)^{n-2} + (X^4)^{n-3} + \dots + 1 \right)$$

D'où le résultat.

On pouvait aussi noter que les racines de $X^4 - 1$ sont les racines quatrième de l'unité, c'est-à-dire $i, -i, 1$ et -1 .

Soit α l'une de ces racines. On a : $\alpha^{4n} - 1 = (\alpha^4)^n - 1 = 1^n - 1 = 1 - 1 = 0$.

On en déduit que α est également racine de $X^{4n} - 1$, c'est-à-dire que $X - \alpha$ divise $X^{4n} - 1$.

Comme ce résultat est valable pour chacune des quatre racines quatrième de l'unité, on en déduit finalement que $(X - i)(X + i)(X - 1)(X + 1) = X^4 - 1$ divise $X^{4n} - 1$.

On a ainsi retrouvé le résultat précédent.

$$\forall n \in \mathbb{N}, X^4 - 1 \text{ divise } X^{4n} - 1.$$

Question 2.

Comme pour la question précédente, nous adoptons deux approches.

Dans une première approche, nous cherchons à tirer parti du résultat obtenu à la question précédente :

$$\begin{aligned}P(X) &= X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} \\&= X^{4a} \times X^3 + X^{4b} \times X^2 + X^{4c} \times X + X^{4d} \\&= [(X^{4a} - 1) + 1] \times X^3 + [(X^{4b} - 1) + 1] \times X^2 + [(X^{4c} - 1) + 1] \times X + [(X^{4d} - 1) + 1] \\&= (X^{4a} - 1) \times X^3 + (X^{4b} - 1) \times X^2 + (X^{4c} - 1) \times X + (X^{4d} - 1) + (X^3 + X^2 + X + 1)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}X^{4a} - 1 &= (X^4 - 1) \times Q_a(X), \quad X^{4b} - 1 = (X^4 - 1) \times Q_b(X), \quad X^{4c} - 1 = (X^4 - 1) \times Q_c(X) \\&\text{et } X^{4d} - 1 = (X^4 - 1) \times Q_d(X)\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}P(X) &= (X^{4a} - 1) \times X^3 + (X^{4b} - 1) \times X^2 + (X^{4c} - 1) \times X + (X^{4d} - 1) + (X^3 + X^2 + X + 1) \\&= (X^4 - 1) \times Q_a(X) \times X^3 + (X^4 - 1) \times Q_b(X) \times X^2 \\&\quad + (X^4 - 1) \times Q_c(X) \times X + (X^4 - 1) \times Q_d(X) + (X^3 + X^2 + X + 1) \\&= (X^4 - 1) \times [Q_a(X) \times X^3 + Q_b(X) \times X^2 + Q_c(X) \times X + Q_d(X)] + (X^3 + X^2 + X + 1)\end{aligned}$$

On note alors que $X^4 - 1 = (X - 1) \times (X^3 + X^2 + X + 1)$ et il vient :

$$\begin{aligned}P(X) &= (X^4 - 1) \times [Q_a(X) \times X^3 + Q_b(X) \times X^2 + Q_c(X) \times X + Q_d(X)] + (X^3 + X^2 + X + 1) \\&= (X - 1) \times (X^3 + X^2 + X + 1) \times [Q_a(X) \times X^3 + Q_b(X) \times X^2 + Q_c(X) \times X + Q_d(X)] \\&\quad + (X^3 + X^2 + X + 1) \\&= (X^3 + X^2 + X + 1) \times \{(X - 1) \times [Q_a(X) \times X^3 + Q_b(X) \times X^2 + Q_c(X) \times X + Q_d(X)] + 1\}\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

En raisonnant avec les racines quatrièmes de l'unité, on note que :

$$X^4 - 1 = (X - i)(X + i)(X - 1)(X + 1) = (X - 1)(X^3 + X^2 + X + 1)$$

Ainsi, les racines complexes de $X^3 + X^2 + X + 1$ sont les trois racines quatrièmes de l'unité différentes de 1.

Soit alors α une telle racine.

Comme $\alpha^4 = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \alpha^{4a+3} + \alpha^{4b+2} + \alpha^{4c+1} + \alpha^{4d} \\ &= (\alpha^4)^a \times \alpha^3 + (\alpha^4)^b \times \alpha^2 + (\alpha^4)^c \times \alpha + (\alpha^4)^d \\ &= 1^a \times \alpha^3 + 1^b \times \alpha^2 + 1^c \times \alpha + 1^d \\ &= \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque ce résultat est valable pour chacune des racines quatrièmes de l'unité différente de 1, on en déduit finalement que $X^3 + X^2 + X + 1$ divise P .

On a retrouvé le résultat.

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4, X^3 + X^2 + X + 1 \text{ divise } P(X) = X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$$