Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2.
Soit $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois réels et $\Phi$ la forme quadratique définie sur E par :

$$\forall \vec{u}(x,y)\in \mathrm{E},\ \Phi(\vec{u})=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ pour que $\Phi$ soit définie positive ;
2. Montrer que l'ensemble $\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 / \Phi \text{ définie positive}\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

## Analyse

Pour ce qui est de la première question, on peut classiquement raisonner sur les valeurs propres de la matrice associée. La seconde question consiste simplement à réinterpréter les inégalités simples obtenues à la question 1 comme des caractérisations d'images réciproques d'applications continues à valeurs dans $\mathbb{R}$.

## Résolution

1. On peut, par exemple, raisonner à partir de la matrice A associée à la forme quadratique $\Phi$. On a :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont alors les solutions de :

$$\begin{vmatrix}\alpha-X & \beta\\ \beta & \gamma-X\end{vmatrix}=0$$

Or :

$$\begin{vmatrix}\alpha-X & \beta\\ \beta & \gamma-X\end{vmatrix}=(\alpha-X)(\gamma-X)-\beta^2=X^2-(\alpha+\gamma)X+\alpha\gamma-\beta^2$$

On retrouve classiquement :

$$\begin{vmatrix} \alpha - X & \beta \\ \beta & \gamma - X \end{vmatrix} = X^2 - (\alpha + \gamma) X + \alpha\gamma - \beta^2 = X^2 - \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) X + \det(\mathrm{A})$$

Nous avons que l'équation $\begin{vmatrix} \alpha - X & \beta \\ \beta & \gamma - X \end{vmatrix} = 0$ admet deux solutions réelles $\lambda_1$ et $\lambda_2$. Les coefficients du trinôme $X^2 - \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) X + \det(\mathrm{A})$ nous permettent alors d'écrire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = \det(\mathrm{A}) \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & \Phi \text{ définie positive} \\ \Leftrightarrow & \lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 > 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 \times \lambda_2 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) > 0 \\ \det(\mathrm{A}) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha + \gamma > 0 \\ \alpha\gamma - \beta^2 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

La forme quadratique $\Phi$ est définie positive si, et seulement si :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma > 0 \\ \alpha\gamma - \beta^2 > 0 \end{cases}$$

2. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble :

$$\left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \Phi \text{ définie positive} \right\} = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \alpha + \gamma > 0 \text{ et } \alpha\gamma - \beta^2 > 0 \right\}$$

Considérons alors les deux applications $\varphi_1$ et $\varphi_2$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\varphi_1 \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x + z \end{cases} \text{ et } \varphi_2 \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto xz - \beta^2 \end{cases}$$

Les expressions étant polynômiales, ces applications sont continues.

On a par ailleurs :

$$\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \alpha+\gamma>0\right\}=\varphi_1^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right) \text{ et } \left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \alpha\gamma-\beta^2>0\right\}=\varphi_2^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$$

$\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, la continuité de $\varphi_1$ et $\varphi_2$ nous permet alors de conclure que les deux parties de $\mathbb{R}^3$ ci-dessus sont des ouverts de $\mathbb{R}^3$. Il en va de même pour leur intersection qui est l'ensemble $\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \alpha+\gamma>0 \text{ et } \alpha\gamma-\beta^2>0\right\}$.

L'ensemble $\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \Phi \text{ définie positive}\right\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$.