Soit E l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{E}=\mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$. On le munit du produit scalaire $(\ |\ )$ défini par :

$$\forall (f,g)\in\mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R}),\ (f\,|\,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Soit $\mathrm{F}=\left\{f\in\mathrm{E}\,/\,f(0)=0\right\}$.

Montrer que $\mathrm{F}^{\perp}=\left\{0_{\mathrm{E}}\right\}$.

Analyse

L'idée de base consiste à se donner une application *f* dans $\mathrm{F}^{\perp}$ et à trouver une application de F « proche » de *f* de sorte que leur produit scalaire (nul) nous permette (quasiment) de conclure à la nullité de *f* …

Résolution

Soit *f* une application dans $\mathrm{F}^{\perp}$. On considère l'application *g* définie par :

$$g:\begin{cases}[0;1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\,f(x)\end{cases}$$

L'application *g* est continue sur l'intervalle $[0;1]$ comme produit de deux applications qui y sont continues.
On a par ailleurs : $g(0)=0\times f(0)=0$.
Ainsi, l'application *g* est un élément de F.

Comme l'application *f* appartient à l'orthogonal de F, on a : $(f\,|\,g)=0$. D'où :

$$(f\,|\,g)=0\Leftrightarrow\int_0^1 f(t)g(t)dt=0\Leftrightarrow\int_0^1 t\big(f(t)\big)^2dt=0$$

L'application $t \mapsto t\left(f(t)\right)^2$ est positive et continue (comme produit d'applications continues) sur l'intervalle $[0\,;1]$. On a donc : $\int_0^1 t\left(f(t)\right)^2 dt = 0 \Rightarrow \forall t \in [0\,;1], t\left(f(t)\right)^2 = 0$.

Alors : $\forall t \in]0\,;1], \left(f(t)\right)^2 = 0$ et donc : $\forall t \in]0\,;1],\ f(t) = 0$.

Mais l'application *f* étant continue, on en déduit : $f(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(t) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 0 = 0$.

Finalement : $\forall t \in [0\,;1],\ f(t) = 0$. L'application *f* est l'application nulle sur $[0\,;1]$ et :

$$\mathrm{F}^{\perp} = \left\{0_{\mathrm{E}}\right\}$$

On note ainsi que la somme $\mathrm{F} + \mathrm{F}^{\perp}$ n'est pas égale à E.

Résultat final

Pour $\mathrm{F} = \left\{ f \in \mathrm{E} \,/\, f(0) = 0 \right\}$, on a : $\mathrm{F}^{\perp} = \left\{0_{\mathrm{E}}\right\}$.