

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle $[a; b]$ ($a < b$) dans \mathbb{R} : $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$. On y définit φ comme suit :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}), \varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)P(t)dt$$

où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ prenant des valeurs positives sur l'intervalle $[a; b]$.

Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

Analyse

On vérifie ici que φ est bien une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive.

Résolution

L'application φ est bien une forme sur $E \times E$.

Elle est bilinéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.

Elle est symétrique puisque f et g jouent des rôles symétriques :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}), \varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)P(t)dt = \int_a^b g(t)f(t)P(t)dt = \varphi(g, f)$$

Elle est positive car pour toute application f de $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$, on a, l'application $f^2 \times P$ prenant des valeurs positives sur l'intervalle $[a, b]$:

$$\varphi(f, f) = \int_a^b f(t)f(t)P(t)dt = \int_a^b (f(t))^2 P(t)dt \geq 0$$

φ est-elle définie ?

Supposons $\varphi(f, f) = 0$. On a donc : $\int_a^b (f(t))^2 P(t)dt = 0$.

L'application $f^2 \times P$ est le produit de deux applications continues sur l'intervalle $[a, b]$, elle y est donc également continue. La fonction polynôme P prenant des valeurs positives sur cet intervalle, on a : $\int_a^b (f(t))^2 P(t) dt = 0 \Rightarrow \forall t \in [a, b], (f(t))^2 P(t) = 0$.

Pour tout t de $[a, b]$ tel que $P(t) \neq 0$, on a alors : $(f(t))^2 = 0$ et donc $f(t) = 0$.

Soit alors un (éventuel) t_0 tel que $P(t_0) = 0$. Il existe un voisinage V de t_0 inclus dans le segment $[a, b]$ et tel que pour tout réel t de V différent de t_0 on ait : $P(t) \neq 0$.

En se plaçant sur un tel voisinage sur lequel f est nulle, on a, en tenant compte de la continuité de f :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow t_0 \\ t \in V \setminus \{t_0\}}} f(t) = f(t_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow t_0 \\ t \in V \setminus \{t_0\}}} 0 = 0$$

En définitive, f est l'application nulle de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Ainsi, φ est définie.

L'application φ est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur $E \times E$. Il s'agit bien d'un produit scalaire sur E .

La forme bilinéaire φ est un produit scalaire sur E .