

Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) dans \mathbb{R}^n .

Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \times \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Analyse

On travaille dans \mathbb{R}^n que l'on peut munir d'un produit scalaire simple. L'inégalité demandée doit alors nous faire penser à une inégalité classique et générale dans les espaces préhilbertiens réels.

Résolution

On muni \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique : pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

on a $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

On a alors : $\sum_{i=1}^n x_i^2 = (x | x) = \|x\|^2$ où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique.

Rappelons également que l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit dans un espace préhilbertien réel :

$$\forall (x, y) \in E^2, |(x | y)| \leq \sqrt{(x | x) \times (y | y)}$$

Soit, en utilisant la norme euclidienne associée : $\forall (x, y) \in E^2, (x | y)^2 \leq \|x\|^2 \times \|y\|^2$.

Avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, l'inégalité se réécrit :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \times \|y\|^2$$

Pour obtenir l'inégalité demandée, il suffit alors de choisir : $y = (1, 1, \dots, 1)$.

En effet, dans ce cas, on a : $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n (x_i \times 1)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$ et $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n 1^2 = \sum_{i=1}^n 1 = n$.

Il vient alors : $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \times \|y\|^2 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \times \sum_{i=1}^n x_i^2$, qui est exactement l'inégalité cherchée.

Résultat final

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \times \sum_{i=1}^n x_i^2$$