

Déterminer les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & 2 \\ & & (0) & & \vdots \\ & & & & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Analyse

Dans la solution proposée, nous procédons classiquement, au regard de la forme simple de la matrice A , à la résolution d'un système linéaire. Pour chaque valeur propre obtenue, nous fournissons le sous-espace propre associé.

Résolution

Posons : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On a facilement :

$$AX = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & 2 \\ & & (0) & & \vdots \\ & & & & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ 2x_n \\ \vdots \\ (n-1)x_n \\ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n \end{pmatrix}$$

Soit alors λ une valeur propre de la matrice A . Il doit donc exister une matrice colonne X non nulle telle que : $AX = \lambda X$.

On a :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ 2x_n \\ \vdots \\ (n-1)x_n \\ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ 2x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ (n-1)x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Avec $\lambda = 0$, les $n-1$ premières lignes du système donnent immédiatement $x_n = 0$.

La dernière se réécrit alors : $x_1 + 2x_2 + \dots + (n-1)x_{n-1} = 0$.

On en conclut immédiatement que 0 est valeur propre de A et que l'espace propre associé E_0 est de dimension $n-2$ ($E_0 = \{(x_1; x_2; \dots; x_{n-1}; 0) \in \mathbb{R}^n / x_1 + 2x_2 + \dots + (n-1)x_{n-1} = 0\}$).

Supposons maintenant que l'on ait $\lambda \neq 0$. On a alors :

$$\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ 2x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ (n-1)x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\lambda} x_n \\ x_2 = \frac{2}{\lambda} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{n-1}{\lambda} x_n \\ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\lambda} x_n \\ x_2 = \frac{2}{\lambda} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{n-1}{\lambda} x_n \\ \frac{1}{\lambda} x_n + 2 \frac{2}{\lambda} x_n + \dots + (n-1) \frac{n-1}{\lambda} x_n + nx_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\lambda} x_n \\ x_2 = \frac{2}{\lambda} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{n-1}{\lambda} x_n \\ \left[1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n\lambda \right] x_n = \lambda^2 x_n \end{cases}$$

Or, on a classiquement :

$$1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)[(n-1)+1][2(n-1)+1]}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \lambda x_1 \\ 2x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ (n-1)x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = \lambda x_n \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\lambda} x_n \\ x_2 = \frac{2}{\lambda} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{n-1}{\lambda} x_n \\ \left[1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n\lambda \right] x_n = \lambda^2 x_n \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\lambda} x_n \\ x_2 = \frac{2}{\lambda} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{n-1}{\lambda} x_n \\ \left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n\lambda \right] x_n = \lambda^2 x_n \end{array} \right.$$

Si, dans la dernière équation, on a : $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n\lambda \neq \lambda^2$ alors nécessairement $x_n = 0$ et les $n-1$ premières lignes du système donnent immédiatement : $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$. Le système n'admet alors comme unique solution que le n -uplet nul.

Peut-on avoir : $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n\lambda = \lambda^2$. Cette équation, en λ , se réécrit :

$$6\lambda^2 - 6n\lambda - n(n-1)(2n-1) = 0$$

Le discriminant réduit associé vaut :

$$\Delta' = (-3n)^2 + 6 \times n(n-1)(2n-1) = 9n^2 + 6n(n-1)(2n-1)$$

Il est strictement positif puisque pour n entier naturel supérieur ou égal à 1, on a : $9n^2 > 0$ et $6n(n-1)(2n-1) \geq 0$. L'équation admet ainsi deux racines distinctes λ_1 et λ_2 non nul (le terme constant est non nul pour $n > 1$).

Pour ces valeurs, l'égalité $\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n\lambda \right] x_n = \lambda^2 x_n$ est vérifiée pour n'importe quelle valeur de x_n . On peut, par exemple choisir : $x_n = 1$ et il vient alors, pour tout entier naturel k dans $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$: $x_k = \frac{k}{\lambda}$.

Résultat final

La matrice $A = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & 2 \\ & & (0) & & \vdots \\ & & & & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$ admet trois valeurs propres distinctes :

- 0, d'espace propre associé E_0 , le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n défini par :
 $E_0 = \left\{ (x_1; x_2; \dots; x_{n-1}; 0) \in \mathbb{R}^n / x_1 + 2x_2 + \dots + (n-1)x_{n-1} = 0 \right\}$.
- Les deux racines λ_1 et λ_2 de l'équation $6\lambda^2 - 6n\lambda - n(n-1)(2n-1) = 0$, d'espaces propres associés E_1 et E_2 respectivement définis par :

$$E_1 = \text{Vect} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_1}; \frac{2}{\lambda_1}; \frac{3}{\lambda_1}; \dots; \frac{n-1}{\lambda_1}; 1 \right) \right\} \text{ et } E_2 = \text{Vect} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_2}; \frac{2}{\lambda_2}; \frac{3}{\lambda_2}; \dots; \frac{n-1}{\lambda_2}; 1 \right) \right\}.$$