Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie et α un réel strictement positif.

Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = -\alpha u$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u = \ker\left(u^2 + \alpha \operatorname{Id}_E\right)$.
2. Montrer que le rang de u est pair (on considèrera la restriction de u au sous-espace : $\ker\left(u^2 + \alpha \operatorname{Id}_E\right)$).

Analyse

Deux éléments de l'énoncé sont fondamentaux : l'égalité $u^3 = -\alpha u$ qui nous donne immédiatement un polynôme annulateur de u et le fait que la dimension de E est finie. L'utilisation du théorème de décomposition des noyaux et le théorème du rang permettent de conclure. Dans la seconde question, on utilise l'indication de l'énoncé et le fait que le réel α est strictement positif pour obtenir rapidement le polynôme minimal de la restriction considérée. On n'oublie pas alors que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les (éventuelles) mêmes racines …

Résolution

Question 1.

Le polynôme $X^3 + \alpha X = X\left(X^2 + \alpha\right)$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u.

Comme les polynômes X et $X^2 + \alpha$ sont premiers entre eux, on a :

$$\ker u \oplus \ker\left(u^2 + \alpha \operatorname{Id}\right) = \ker 0_{\mathscr{L}(E)} = E$$

On a donc : $\dim \ker u + \dim \ker\left(u^2 + \alpha \operatorname{Id}\right) = \dim E$. Or, d'après le théorème du rang (E étant de dimension finie), on a également : $\dim \ker u + \operatorname{rg} u = \dim E$.

On en déduit : $\dim \ker\left(u^2 + \alpha \operatorname{Id}\right) = \operatorname{rg} u$.

Soit alors x un élément de $\operatorname{Im} u$. Il existe un élément t de E tel que : $x = u(t)$.

Alors : $\left(u^2 + \alpha \operatorname{Id}\right)(x) = \left(u^2 + \alpha \operatorname{Id}\right)\left(u(t)\right) = \left(u^3 + \alpha \mathrm{u}\right)(t) = 0_E$.

On en déduit : $x \in \ker\left(u^2 + \alpha \,\mathrm{Id}\right)$ puis $\mathrm{Im}\, u \subset \ker\left(u^2 + \alpha \,\mathrm{Id}\right)$.
Ces deux sous-espaces étant de même dimension, ils sont donc égaux.

$$\boxed{\mathrm{Im}\, u = \ker\left(u^2 + \alpha \,\mathrm{Id}\right)}$$

Question 2.

Comme indiqué dans l'énoncé, considérons le sous-espace $\mathrm{F} = \mathrm{Im}\, u = \ker\left(u^2 + \alpha \,\mathrm{Id}\right)$ et notons $u|_{\mathrm{F}}$ la restriction de *u* à F.
Pour tout vecteur *x* de F, on a donc : $\left(u^2 + \alpha x\right)(x) = 0_{\mathrm{F}} = 0_{\mathrm{E}}$.
Ainsi, $\mathrm{X}^2 + \alpha$ est un polynôme annulateur de $u|_{\mathrm{F}}$. Or, ce polynôme est unitaire et irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ puisque le réel α est strictement positif. Il s'agit donc du polynôme minimal de $u|_{\mathrm{F}}$.
Supposons que la dimension de F soit impaire. Alors le polynôme caractéristique de $u|_{\mathrm{F}}$, qui est de degré dim F, admettrait au moins une racine réelle qui serait également racine du polynôme minimal, ce qui est absurde puisque celui-ci n'admet pas de racine réelle.

En définitive, la dimension de $\mathrm{F} = \mathrm{Im}\, u = \ker\left(u^2 + \alpha \,\mathrm{Id}\right)$ est paire.

$$\boxed{\text{Le rang de l'endomorphisme } u \text{ est pair.}}$$