

Soit α , β et γ trois scalaires, deux à deux distincts, dans un corps \mathbb{K} .
On considère l'application φ :

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{K}_2[X] &\rightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P &\mapsto \varphi(P) = R\end{aligned}$$

où R est le reste de la division euclidienne du polynôme $X^3 P$ par le polynôme $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$.

Déterminer les éléments propres de φ .

Analyse

Les scalaires α , β et γ jouent bien sûr un rôle particulier (!) dans cet exercice. On doit les exploiter au niveau de la recherche d'une valeur propre et en écrivant la division euclidienne d'un polynôme de $\mathbb{K}_2[X]$ par le polynôme $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. Dans un premier temps, on obtient alors des valeurs possibles pour les valeurs propres de φ et on établit ensuite que ce sont effectivement des valeurs propres.

Résolution

Soit λ une valeur propre de φ .

Il existe un polynôme non nul P tel que : $\varphi(P) = \lambda P$, c'est-à-dire $R = \lambda P$. En particulier :

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda P(\alpha) = R(\alpha) \\ \lambda P(\beta) = R(\beta) \\ \lambda P(\gamma) = R(\gamma) \end{cases}$$

Soit P un élément de $\mathbb{K}_2[X]$.

La division euclidienne de $X^3 P$ par $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ s'écrit :

$$X^3 P(X) = Q(X)(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) + R(X)$$

où $R = \varphi(P)$ et $d^\circ R \leq 2$.

En donnant à l'indéterminée X les valeurs α , β et γ , on obtient le système (S') :

$$(S') \quad \begin{cases} \alpha^3 P(\alpha) = R(\alpha) \\ \beta^3 P(\beta) = R(\beta) \\ \gamma^3 P(\gamma) = R(\gamma) \end{cases}$$

Des systèmes (S) et (S') on tire :

$$(S'') \quad \begin{cases} \lambda P(\alpha) = \alpha^3 P(\alpha) \\ \lambda P(\beta) = \beta^3 P(\beta) \\ \lambda P(\gamma) = \gamma^3 P(\gamma) \end{cases}$$

Le polynôme P étant de degré inférieur ou égal à 2, l'un des trois scalaires $P(\alpha)$, $P(\beta)$ ou $P(\gamma)$ est non nul. On en déduit alors que les trois valeurs possibles de λ sont α^3 , β^3 ou γ^3 (ce qui précède ne prouve pas que ces scalaires sont des valeurs propres de φ mais s'il en existe elles ne peuvent prendre que ces valeurs).

Les scalaires α , β et γ jouant des rôles symétriques, nous nous contentons de traiter en détail le cas $\lambda = \alpha^3$.

Le système (S'') se réécrit :

$$(S''') \quad \begin{cases} \alpha^3 P(\alpha) = \alpha^3 P(\alpha) \\ \alpha^3 P(\beta) = \beta^3 P(\beta) \\ \alpha^3 P(\gamma) = \gamma^3 P(\gamma) \end{cases}$$

Comme $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq \gamma$, il vient : $P(\beta) = P(\gamma) = 0$.

Le système (S') nous donne alors : $R(\beta) = R(\gamma) = 0$.

P étant un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, il est de la forme :

$$P(X) = a(X - \beta)(X - \gamma) \quad a \in \mathbb{K}$$

Il en va de même pour R : $R(X) = b(X - \beta)(X - \gamma)$ avec $b \in \mathbb{K}$.

La division euclidienne de $X^3 P$ par $(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ s'écrit alors :

$$X^3 P(X) = X^3 a(X - \beta)(X - \gamma) = Q(X)(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) + b(X - \beta)(X - \gamma)$$

Avec $X = \alpha$, on obtient alors : $\alpha^3 a(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = b(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$, soit $b = \alpha^3 a$.

Ainsi, $R(X) = \varphi(P)(X) = b(X - \beta)(X - \gamma) = \alpha^3 a(X - \beta)(X - \gamma) = \alpha^3 P(X)$.

Ainsi, α^3 est bien une valeur propre de φ et les vecteurs propres associés sont de la forme $a(X - \beta)(X - \gamma)$. Soit : $E_{\alpha^3} = \text{Vect}\{(X - \beta)(X - \gamma)\}$.

De façon similaire, on montre que :

- β^3 est valeur propre d'espace propre associé $E_{\beta^3} = \text{Vect}\{(X - \alpha)(X - \gamma)\}$.
- γ^3 est valeur propre d'espace propre associé $E_{\gamma^3} = \text{Vect}\{(X - \alpha)(X - \beta)\}$.

Résultat final

L'application φ admet pour valeurs propres les scalaires α^3 , β^3 et γ^3 d'espaces propres associés $E_{\alpha^3} = \text{Vect}\{(X - \beta)(X - \gamma)\}$, $E_{\beta^3} = \text{Vect}\{(X - \alpha)(X - \gamma)\}$ et $E_{\gamma^3} = \text{Vect}\{(X - \alpha)(X - \beta)\}$ respectivement.

Complément

On a $\dim \mathbb{K}_2[X] = 3$ et chacun des 3 espaces propres est de dimension 1.

On en déduit immédiatement que l'application φ est diagonalisable.