

Déterminer les éléments propres de l'application φ définie par :

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto \varphi(P) = R / R(X) = P(X+1) - P'(X)\end{aligned}$$

Analyse

On identifie rapidement, via des considérations classiques sur les degrés, la seule valeur propre possible. La détermination de l'espace propre associé est aisée grâce à la formule de Taylor pour les polynômes, formule à laquelle $P(X+1)$ doit faire penser ...

Résolution

Soit λ une valeur propre de φ .

Il existe un polynôme non nul P tel que : $\varphi(P) = \lambda P$, c'est-à-dire $P(X+1) - P'(X) = \lambda P(X)$.

Comme P est non nul, on a : $\deg(\varphi(P)) = \deg(P)$.

Par ailleurs, le terme de plus haut degré de $\varphi(P)$ est identique à celui de P .

D'après l'égalité précédente, on en déduit ainsi que la seule valeur possible de λ est 1.

On veut donc P non nul tel que $P(X+1) - P'(X) = \lambda P(X)$. Soit $P(X+1) - P(X) = P'(X)$.

En notant n le degré de P , la formule de Taylor donne :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(1)}{k!} X^k$$

ou, en permutant 1 et X :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^n \frac{1^k}{k!} P^{(k)}(X) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(X) = P(X) + P'(X) + \frac{1}{2} P''(X) + \dots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$$

Plus généralement, pour tout entier naturel m supérieur ou égal à $\max(\deg(P), 2)$, on a :

$$P(X+1) = P(X) + P'(X) + \frac{1}{2} P''(X) + \dots + \frac{1}{m!} P^{(m)}(X)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) &= P'(X) \\ \Leftrightarrow P'(X) + \frac{1}{2}P''(X) + \dots + \frac{1}{m!}P^{(m)}(X) &= P'(X) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}P''(X) + \dots + \frac{1}{m!}P^{(m)}(X) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}P(X) + \dots + \frac{1}{m!}P^{(m-2)}(X) \right)' &= 0 \end{aligned}$$

Comme le degré du membre du polynôme apparaissant dans le membre de gauche est celui de P , cette dernière égalité équivaut à : $P'' = 0$, soit : $\deg(P) = 1$.

En définitive, les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les polynômes de la forme $P(X) = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

Résultat final

Pour l'application φ définie par :

$$\varphi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$$
$$P \mapsto \varphi(P) = R \text{ / } R(X) = P(X+1) - P'(X)$$

on a :

$$\text{Spec}(\varphi) = \{1\} \text{ et } E_1 = \text{Vect}\{1; X\}.$$