Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^{-1}=A$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $e^A=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}$.

Reprendre les questions précédentes en supposant que A est dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et vérifie $A^{-1}=-A$.

Analyse

Dans les deux situations, on dispose facilement d'un polynôme annulateur de A …

Résolution

Question 1.

Comme la matrice A vérifie l'égalité $A^{-1}=A$, on a $A^2=I_n$ et le polynôme $P(X)=X^2-1$ est un polynôme annulateur de A. Comme P est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ ($P(X)=(X+1)(X-1)$), on peut donc conclure que la matrice A est diagonalisable.

La matrice A est diagonalisable.

Question 2.

En tenant compte de $A^2=I_n$, on a immédiatement :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ A^{2k}=\left(A^2\right)^k=\left(I_n\right)^k=I_n \text{ puis } A^{2k+1}=A^{2k}\times A=I_n\times A=A$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}e^A&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{A^{2k}}{(2k)!}+\frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{I_n}{(2k)!}+\frac{A}{(2k+1)!}\right)\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\times I_n+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\times A=\cosh(1)\times I_n+\sinh(1)\times A\end{aligned}$$

On a donc :

$$e^A = \cosh(1)\times I_n + \sinh(1)\times A$$

On suppose maintenant que la matrice A est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et vérifie $A^{-1} = -A$.

Comme la matrice A vérifie l'égalité $A^{-1} = -A$, on a $A^2 = -I_n$ et le polynôme $P(X) = X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de A. Comme P est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ ($P(X) = (X+i)(X-i)$), on peut donc conclure que la matrice A est diagonalisable.

La matrice A est diagonalisable.

En tenant compte de $A^2 = -I_n$, on a immédiatement :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^{2k} = \left(A^2\right)^k = \left(-I_n\right)^k = (-1)^k I_n \text{ puis } A^{2k+1} = A^{2k}\times A = (-1)^k I_n \times A = (-1)^k A$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{A^{2k}}{(2k)!} + \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k I_n}{(2k)!} + \frac{(-1)^k A}{(2k+1)!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\times I_n + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\times A = \cos(1)\times I_n + \sin(1)\times A \end{aligned}$$

On a donc cette fois :

$$e^A = \cos(1)\times I_n + \sin(1)\times A$$