Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, a_{ij}=\dfrac{i}{j}$.

A est-elle diagonalisable ?

Analyse

Exercice où il faut typiquement observer la matrice considérée (écrivez-la !!!) avec attention !

Résolution

Pour y voir (peut-être ?) un peu plus clair, représentons la matrice A :

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots & \frac{2}{n} \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \cdots & \frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n}{1} & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} & \cdots & \frac{n}{n} \end{pmatrix}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

Notons $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{u}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+...+n\vec{e}_n=\sum_{i=1}^{n} i\,\vec{e}_i$.

On a immédiatement, d'après les colonnes de A : $\varphi(\vec{e}_1)=\vec{u}$, $\varphi(\vec{e}_2)=\frac{1}{2}\vec{u}$, …, $\varphi(\vec{e}_n)=\frac{1}{n}\vec{u}$.

(on peut formellement obtenir ce résultat en considérant directement la j-ième colonne de A correspondant aux coordonnées de $\varphi(\vec{e}_j)$ dans $\mathscr{B}$: $\varphi(\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{j}\vec{e}_i=\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{n} i\vec{e}_i=\frac{1}{j}\vec{u}$)

On déduit de ce qui précède que l'on a : $\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{Vect}\{\vec{u}\}$, d'où $\operatorname{rg}\varphi=1$.

On a par ailleurs : $\varphi(\vec{u})=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} i\vec{e}_i\right)=\sum_{i=1}^{n} i\varphi(\vec{e}_i)=\sum_{i=1}^{n} i\times\frac{1}{i}\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}\vec{u}=n\vec{u}$.

On en déduit ainsi que n est valeur propre de A de vecteur propre associé $\vec{u}$.

Tout vecteur ayant pour image un vecteur colinéaire à $\vec{u}$, les vecteurs propres associés à la valeur propre n sont donc les vecteurs eux-mêmes colinéaires à $\vec{u}$, c'est-à-dire les éléments de $\operatorname{Im}\varphi$ qui est donc le sous-espace propre E_n associé à n. $\dim E_n = \operatorname{rg}\varphi = 1$.

D'après le théorème du rang, on a alors : $\dim\ker\varphi = \dim E - rg\varphi = \dim\mathbb{R}^n - rg\varphi = n-1$.
On en déduit que φ admet 0 pour deuxième valeur propre et que le sous-espace propre associé, $E_0 = \ker\varphi$, vérifie : $\dim E_0 = \dim\ker\varphi = n-1$, c'est un hyperplan et on en obtient facilement l'équation suivante : $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + ... + \frac{1}{n}x_n = 0$.

Ainsi, la matrice A, admet deux valeurs propres, n et 0, dont les dimensions des sous-espaces propres associés valent respectivement 1 et $n-1$, leur somme étant égale à la dimension de $\mathbb{R}^n$. On en conclut immédiatement que A est diagonalisable.

Résultat final

La matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} = \left(\frac{i}{j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.