

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

On définit sur E l'application N par :

$$\forall P \in E, N(P) = \sup_{x \in [0;1]} \{ |P(x)| \}$$

On admet que N est une norme sur E .

On définit également sur E l'application f par :

$$f : P \mapsto f(P) \text{ tel que : } (f(P))(X) = 1 + \frac{1}{2} X P(X)$$

1. Montrer que f est une contraction de (E, N) .
2. Montrer que f n'admet pas de point fixe. Que peut-on en déduire pour E ?

Analyse

Le théorème du point fixe requiert que l'espace considéré soit complet et que l'application considérée soit contractante. Les situations où l'application est contractante mais dépourvue de point fixe sont donc intéressantes ...

Résolution

Question 1.

Rappelons qu'une application contractante d'un espace vectoriel normé dans un autre est une application k -lipschitzienne avec $k \in]0; 1[$.

On s'intéresse donc ici, pour deux polynôme quelconques P et Q à : $N(f(P) - f(Q))$.

Pour tout x réel dans l'intervalle $[0; 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \left| [f(P) - f(Q)](x) \right| &= \left| 1 + \frac{1}{2}xP(x) - \left[1 + \frac{1}{2}xQ(x) \right] \right| \\ &= \frac{1}{2}x|P(x) - Q(x)| \\ &\leq \frac{1}{2}|P(x) - Q(x)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [0;1]} \{|P(x) - Q(x)|\} = \frac{1}{2}N(P - Q) \end{aligned}$$

On a donc : $\forall x \in [0; 1], |[f(P) - f(Q)](x)| \leq \frac{1}{2}N(P - Q)$.

Il en découle : $\sup_{x \in [0;1]} \{|[f(P) - f(Q)](x)|\} \leq \frac{1}{2}N(P - Q)$, soit, finalement :

$$N(f(P) - f(Q)) \leq \frac{1}{2}N(P - Q)$$

Ainsi, l'application f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne. Il s'agit donc d'une contraction.

L'application f est une contraction de E dans E .

Question 2.

Soit P_0 un point fixe de f . On a donc : $f(P_0) = P_0$.

Le polynôme P_0 ne peut être le polynôme nul car alors $f(P_0)$ serait le polynôme constant prenant la valeur $\frac{1}{2}$ et nous n'aurions pas $f(P_0) = P_0$.

Mais alors on a : $d(f(P_0)) = d\left(1 + \frac{1}{2}X.P_0\right) = d(X.P_0) = d(P_0) + 1 \neq d(P_0)$ et on ne peut avoir $f(P_0) = P_0$.

En définitive, l'application f n'admet pas de point fixe.

L'application f n'admet pas de point fixe.

Il découle immédiatement de ce résultat que E n'est pas complet pour la norme N .
En effet, rappelons le résultat général (et fondamental !) : si un espace vectoriel normé est complet alors toute application contractante admet un point fixe (unique).

L'espace vectoriel (E, N) n'est pas complet.