

Soit E un espace vectoriel normé complet.
Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f$ soit contractante.

Montrer que f admet un unique point fixe.
Généraliser.

Analyse

Nous avons ici affaire à un complément intéressant du théorème du point fixe : finalement, ce n'est pas tant le fait que f soit contractante qui importe et permet de conclure à l'existence (et à l'unicité) d'un point fixe que le fait qu'une itérée (f^m) de f le soit !

Résolution

Soit a le point fixe (unique) de $f \circ f$. Nous allons montrer qu'il s'agit également du point fixe de f .

Dans un premier temps, nous allons établir que si f admet un point fixe, il est unique.

Soit α et β deux points fixes de f .

L'application $f \circ f$ étant contractante, il existe un réel k dans $]0; 1[$ tel que pour tous vecteurs x et y de E , on ait :

$$\|(f \circ f)(x) - (f \circ f)(y)\| \leq k \|x - y\|$$

En particulier : $\|(f \circ f)(\alpha) - (f \circ f)(\beta)\| \leq k \|\alpha - \beta\|$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|(f \circ f)(\alpha) - (f \circ f)(\beta)\| &\leq k \|\alpha - \beta\| \\ \Leftrightarrow \|f(\alpha) - f(\beta)\| &\leq k \|\alpha - \beta\| \\ \Leftrightarrow \|\alpha - \beta\| &\leq k \|\alpha - \beta\| \end{aligned}$$

Comme $k \in]0; 1[$, on en déduit : $\|\alpha - \beta\| = 0$, c'est-à-dire : $\alpha = \beta$.

Le vecteur a est l'unique solution de l'équation $(f \circ f)(x) = x$:

$$(f \circ f)(a) = a$$

On en tire : $f((f \circ f)(a)) = f(a)$, soit : $(f \circ f)(f(a)) = f(a)$.

Mais cette dernière égalité traduit le fait que $f(a)$ est également solution de l'équation $(f \circ f)(x) = x$. L'unicité de la solution nous conduit alors à : $f(a) = a$.

On peut généraliser le résultat précédent en supposant qu'il existe un entier naturel non nul m tel que f^m soit contractante ($f^m = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{m \text{ fois}}$). On note encore a le point fixe de f^m .

L'unicité du point fixe de f s'établit de façon similaire avec les équivalences :

$$\begin{aligned} & \|f^m(\alpha) - f^m(\beta)\| \leq k \|\alpha - \beta\| \\ \Leftrightarrow & \|f^{m-1}(\alpha) - f^{m-1}(\beta)\| \leq k \|\alpha - \beta\| \\ & \Leftrightarrow \dots \\ \Leftrightarrow & \|f(\alpha) - f(\beta)\| \leq k \|\alpha - \beta\| \\ \Leftrightarrow & \|\alpha - \beta\| \leq k \|\alpha - \beta\| \end{aligned}$$

Pour ce qui est de l'existence, on part cette fois de : $f^m(a) = a$ d'où on tire :

$$f(f^m(a)) = f(a), \text{ soit } f^{m+1}(a) = f(a), \text{ puis : } f^m(f(a)) = f(a).$$

L'équation $f^m(x) = x$ admettant une solution unique, on a : $f(a) = a$.