

Soit E un espace vectoriel normé.
Soit K une partie compacte convexe de E .
Soit f une application de K dans K , 1-lipschitzienne.

Montrer que f admet un point fixe.

Indication : pour a dans K fixé et tout entier naturel n non nul, on pourra considérer l'application f_n définie sur K par :

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(x)$$

Analyse

L'application f n'étant pas contractante, on ne peut bien sûr pas conclure prématurément !
Comme $\frac{1}{n} \in]0; 1]$ et $\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, l'expression de $f_n(x)$ doit nous faire penser à la convexité de K ! On montre alors facilement que f_n est à valeur dans K . Ne serait-elle pas ... contractante ?

Résolution

On a : $\frac{1}{n} \in]0; 1]$ et $\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$. Par ailleurs, a et $f(x)$ sont, par hypothèse sur a et f , dans K . Comme K est une partie convexe de E , on en déduit que $\frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(x)$ est un élément de K .

Pour tout entier naturel n non nul, la partie K est donc stable par f_n .

Notons alors $\| \cdot \|$ la norme sur E .

Pour tous vecteurs x et y de E et tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned}\|f_n(y) - f_n(x)\| &= \left\| \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(x) - \left[\frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(y) \right] \right\| \\ &= \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(x) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(y) \right\| \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f(x) - f(y)\|\end{aligned}$$

Mais l'application f étant 1-lipschitzienne, on a : $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.

Finalement :

$$\|f_n(y) - f_n(x)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x - y\|$$

Pour tout entier naturel strictement supérieur à 1, on a : $\frac{1}{n} \in]0; 1[$ et l'application f_n est contractante. K étant une partie compacte de E , elle est complète et l'application f_n admet ainsi un unique point fixe dans K que nous notons x_n .

La partie K étant compacte, nous pouvons extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente. Notons l sa limite.

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = l$.

L'application f étant 1-lipschitzienne, elle est continue et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$.

Par ailleurs, on a : $f_n(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$. Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = l$.

On en tire immédiatement : $f(l) = l$.

Ainsi, toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) est point fixe de f .